Liceu

C.O:5183. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi A mulţimea funcţiilor $f : \{1, 2, \ldots, m\} \to \to \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$ astfel încât $\dfrac{|f(x)| - |f(y)|}{x - y} > 0$, oricare ar fi numerele distincte $x, y \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Să se arate că $m \leq n$ şi să se determine numărul elementelor mulţimii A.

Ioan Băetu, Botoşani

C.O:5184. Să se determine numerele naturale n pentru care numărul $11^n + 12^n + 13^n$ este pătrat perfect.

Ion Cucurezeanu, Constanţa

C.O:5185. Fie $a, b, c > 0$, astfel încât ecuaţia $a^x + b^x = c^x$ admite soluţii reale. Să se arate că $(a - c)(b - c) > 0$ şi că soluţia ecuaţiei este unică.

Rodica Pop şi *Ovidiu Pop*, Satu Mare

C.O:5186. Să se arate că pentru orice funcţie $\varphi : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ există şi este unică o funcţie $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât $\sin f(t) + t f(t) = \varphi(t)$, oricare ar fi $t \in (1, \infty)$. În plus, dacă φ este continuă, atunci f este continuă, iar dacă φ este derivabilă, atunci f este derivabilă.

Ioan Băetu, Botoşani

PROBLEMS FOR COMPETITIONS AND OLYMPIADS

Junior Level

C.O:5179. Find all positive integers m and n such that $n! - 20 = m^2$.

Ion Cucurezeanu, Constanţa

C.O:5180. Let $ABCD$ be a square of centre O and let M, N, P, S be the midpoints of OA, CD, BC, OB, respectively. Point H is the orthocentre of the triangle MNP. Prove that points N, H, S are collinear.

Dragoş Petrică şi *Cosmin Manea*, Piteşti

C.O:5181. Let $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ be real numbers with $a_1 = a_{10}$. Show that there exists $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ such that a_{i+1} belongs to the closed interval with the endpoints a_i and a_{i+2}.

Vasile Oancea, Tg. Ocna

C.O:5182. The positive integers m, n, p, x satisfies the relation $(3^m + 1)^n - 3^p = x^2$. Prove that $n = 1$.

Ion Cucurezeanu, Constanţa

Senior Level

C.O:5183. Suppose $m, n \in \mathbb{N}^*$ and let A be the set of functions $f : \{1, 2, \ldots, m\} \to \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$ satisfying $\dfrac{|f(x)| - |f(y)|}{x - y} > 0$, for any distinct numbers $x, y \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Show that $m \leq n$ and find the number of elements of the set A.

Ioan Băetu, Botoşani

C.O:5184. Find all positive numbers n for which $11^n + 12^n + 13^n$ is a perfect square.

Ion Cucurezeanu, Constanţa

C.O:5185. Let a, b, c be positive real numbers such that the equation $a^x + b^x = c^x$ has real solutions. Show that $(a - c)(b - c) > 0$ and prove that the given equation has a unique solution.

Rodica Pop şi *Ovidiu Pop*, Satu Mare

C.O:5186. Prove that for any function $\varphi : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ there exists a unique function $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ such that $\sin f(t) + tf(t) = \varphi(t)$, for any $t \in (1, \infty)$. Moreover, prove that if φ is continuous, then f is continuous, and if φ is differentiable, then f is differentiable.

Ioan Băetu, Botoşani

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Până la 31 ianuarie 2011, au trimis soluţii la problemele propuse următorii elevi:

AIUD (ALBA) *Ş. g. „Ovidiu Hulea“* cl.VIII Inceu Andreea (120).
ALBA IULIA (ALBA) *Ş. g. „Vasile Goldiş“* cl.VI Avram Andreea (100); *C. N. „Horea Cloşca şi Crişan“* cl. X Urcan Radu (70); *C. N. „I. M. Clain“* cl. V Trânbţaş Lia Raluca (100).
ALEŞD (BIHOR) *Ş. g. „Constantin Şerban“* cl.VII Gui Andreea (120).
ARAD (ARAD) *Gr. Şc. de Ind. Alimentară* cl. IX Albă Mădălina Roxana (100), Roşca Petru Rafael (100); *Lic. „Adam Müller Guttenbrunn“* cl.V Brehuescu Hannelope (100), Popescu Ioana (80+80), cl.VII Culda Alexa (100), Domjan David (100), Fizedean Mihai (100), Iordan Andrada (100), Lata Teofil Ciprian (100), Mănăilă Roberto (100), Mănăştureian Diana (100), cl.VIII Aron Răzvan (100), Iancu Denisa (160), Pavel Alexandra (140), Rosser Cristina (100), Şmalbergher Cristian (120), Vasiu Kaiser (150); *C. N. „Moise Nicoară“* cl.V Popescu Valentin (80).
AVRIG (SIBIU) *Lic. „Gheorghe Lazăr“* cl.VII Şerban Diana Nicolle (80).
BACĂU (BACĂU) *Ş. g. „Alexandru Ioan Cuza“* cl.V Chiriac Dana Maria (110), Neacşu Cristian (120), Surdu George Bogdan (110), cl.VI Condei Georgiana (100), Guţu Vlad (100), Mârza Alexandra (110), Nicolae Gabriel (100), Sâia Daria (110), Tanasov Andrei (100), *fără menţiune de clasă*: Goroneanu Teodora (110); *Ş. g. „Ion Creangă“* cl.VI Bogza Ioana Irina (50), Cimpoeru Cătălina Maria (50), Gheorghiu Anca (60), cl.VII Apostol Codrina (70), Babaşa Georgiana Adina (70), Bârsan Monica (70), Camară Augustin (60), Dorobăţ Elena (70), Drugă Bianca (60), Obreja Diana (70), Pascu Mariana Valentina (70), Popa Ana Maria (70); *C. N. „Vasile Alecsandri“* cl.V Mateiu Alice Georgiana (100).
BAIA MARE (MARAMUREŞ) *Ş. g. „Alexandru Ioan Cuza“* cl.V Gaşparik Iasmina (50), Gârban Cristina Georgiana (60), Paşca Laura (60), Petrean Denisa (60), Pop Vicenţiu (50); *Ş. g. „Nichita Stănescu“* cl.III Lauran Cosmin (100), cl.VII Cordea Claudia Ioana (80); *Ş. g. „Nicolae Iorga“* cl.IV Petz Alin (70), Sântejan Tudor Voicu (220), cl.VIII Sântejudean Bogdan (70); *Ş. g. „Octavian Goga“* cl.IV Conţui Alexandru (60), Conţui Larisa (80), Crişan Ionuţ (100), Dorca Răzvan (60), Iacob Lorena (100), Konyves Beatrix (100), Motişan Adina (100), Nyegre Dariana (100), Osan Ştefania (100), Pop Dragoş (100), Radu Patricia (100), Raţu David (100), Sarca Denisa (100); *C. N. „Gheorghe Şincai“* cl.V Gălăţanu Tiberiu Adrian (270), cl.IX Baitar Bogdan (80); *C. N. „Vasile Lucaciu“* cl.VI Moraru Emanuel (120+100+100), Sanau Ioana (100), Silaghi Melinda (120), cl.VII Balog