

PROBLEME PENTRU EXAMENE NAȚIONALE¹⁾

Clasa a VII-a

1. Împărțind un număr natural A la 6 obținem restul 5. Ce rest obținem dacă împărțim pe A la 3?
2. Produsul a două numere naturale este 144. Aflați cel mai mic multiplu comun al celor două numere știind că sunt prime între ele.
3. Dacă $\frac{a}{5} = \frac{6}{b}$ calculați $ab - 10$.
4. Un triunghi ascuțitunghic și isoscel are un unghi exterior cu măsura de 120° . Care sunt măsurile unghiurilor interioare ale triunghiului?
5. În triunghiul ABC notăm cu I punctul de intersecție a bisectoarelor. Dacă $m(\sphericalangle AIB) = 110^\circ$, aflați măsura unghiului ICA .
6. Într-un triunghi suma lungimilor liniilor mijlocii este 10 cm. Aflați perimetrul triunghiului.

Clasa a VIII-a

7. Un triunghi echilateral are aria și perimetrul exprimate prin același număr real. Aflați perimetrul triunghiului.
8. Calculați: $|2\sqrt{6} - 5| - |4 - 2\sqrt{6}|$.
9. Aflați numărul real m știind că ecuația, cu necunoscuta x :

$$mx + 3 = m + 5$$

are soluția 2.

¹⁾ La problemele din această rubrică nu se primesc soluții.

10. În dreptunghiul $ABCD$ proiecțiile laturilor pe diagonala AC au lungimile de 16 cm, respectiv 9 cm. Aflați aria dreptunghiului.

11. În trapezul $ABCD$ laturile neoparalele AD și BC se intersectează în M . Dacă $\frac{DC}{AB} = \frac{1}{3}$ și aria triunghiului DCM este egală cu 4 cm^2 , aflați aria trapezului.

12. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub. Ce măsură are unghiul dintre AC și $A'D'$?

Clasa a IX-a

13. Cifrele a_0, a_1, a_2, \dots verifică $\frac{1}{7} = \overline{a_0 a_1 a_2 a_3 \dots}$. Calculați suma $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{60}$.

14. Numărul real a verifică $a + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Arătați că $2a - \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

15. Calculați media geometrică a soluțiilor ecuației $x^2 - 3x + 1 = 0$.

16. Stabiliți identitatea:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

17. Arătați că $\lceil \sqrt{n^2 + 2n} \rceil = n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

18. Numerele reale a și b verifică $a + b = 1$ și $ab = 4$. Calculați $a^3 + b^3$.

Clasa a X-a

19. Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $16^a = 3$. Calculați 32^a .

20. Determinați valorile reale ale lui x pentru care $\log_x(x+2)$ este bine definit.

21. Fie $a, b \in (1, \infty)$. Arătați că $\log_a b + \log_b a \geq 2$.

22. Calculați modulul numărului complex $(1+i)^{20}$.

23. Fie $z = \frac{1+i}{1-i}$. Calculați $z \cdot \bar{z}$.

24. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $(a+bi)^2 = 3+4i$.

Clasa a XI-a

25. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Calculați $(A - I_2)(A - 3I_2)$.

b) Verificați dacă $A^3 = 13A - 12I_2$.

c) Arătați că $A^n \neq I_2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

- 26.** Considerăm șirul $a_n = \frac{2^n}{n!}$, $n \geq 2$.
- Calculați $a_{n+1} - a_n$, $n \geq 2$.
 - Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 2}$ este monoton.
 - Arătați că șirul $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $n \geq 2$ este mărginit.

Clasa a XII-a

27. Fie $G = \{e, a, b, c\}$ un grup (în notație multiplicativă) cu proprietatea că $a^2 = b^2 = c^2 = e$.

- Alcătuți tabla grupului.
- Aflați $x \in G$ pentru care $x^3 = a$.
- Câte triplete $(x, y, z) \in G \times G \times G$ verifică relația $xyz = e$?

28. Considerăm funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

- Calculați $\int_1^e f(x) dx$.
- Calculați $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$.
- Arătați că șirul $I_n = \int_1^e f^n(x) dx$, $n \geq 1$, este monoton.