ii) *Dacă* $1+1=0$, *rămâne valabilă concluzia de la* i)?

Marcel Ţena, Bucureşti

Soluţie. i) Fixăm un element $a \in L \setminus K$, deci există $b \in L \setminus K$ astfel încât $s = a + b \in K$, $p = ab \in K$. Luăm $\lambda = a - b$ şi avem $\lambda = s - 2b \in L \setminus K$, iar $\lambda^2 = s^2 - 4p \in K$. Notăm $K(\lambda) = \{x + y\lambda \mid x, y \in K\}$ şi observăm că mulţimea $K(\lambda)$ este un subcorp al lui L ce include pe K (inversul unui element nenul $x + y\lambda \in K(\lambda)$ rămâne în $K(\lambda)$, deoarece $\dfrac{1}{x+y\lambda} = \dfrac{x - y\lambda}{x^2 - y^2\lambda^2} = \dfrac{x}{x^2 - y^2\lambda^2} - \dfrac{y}{x^2 - y^2\lambda^2}\lambda \in K(\lambda)$).

Arătăm egalitatea $K(\lambda) = L$, care se reduce la incluziunea $L \subseteq K(\lambda)$.

Fie $x \in L$ arbitrar. Dacă $x \in K$, atunci $x \in K(\lambda)$. Dacă $x \in L \setminus K$ avem două subcazuri, după cum $x + \lambda \in K$, respectiv $x + \lambda \in L \setminus K$. Dacă $x + \lambda \in K (\subseteq K(\lambda))$, rezultă $x \in K(\lambda)$. Dacă $x + \lambda \in L \setminus K$, din ipoteză există $\mu \in L \setminus K$ astfel încât $u = x + \lambda + \mu \in K$, $v = (x + \lambda)\mu \in K$. Atunci $x + \lambda$ şi μ sunt rădăcinile polinomului $t^2 - ut + v \in K[t]$, prin urmare $(x+\lambda)^2 - u(x+\lambda) + v = 0$, (1). Tot din ipoteză, există $z \in L \setminus K$ astfel încât $u_1 = x + z \in K$, $v_1 = xz \in K$ şi analog rezultă $x^2 - u_1 x + v_1 = 0$, (2). Scăzând (2) din (1) obţinem $x = \dfrac{-\lambda^2 + u\lambda + v_1}{2\lambda - u + u_1}$, deci $x \in K(\lambda)$.

ii) Luând $K = \mathbb{F}_2 (= \mathbb{Z}_2)$ şi $L = \mathbb{F}_4$ (prin $\mathbb{F}_n$ notăm corpul cu n elemente), avem $\mathbb{F}_= \left\{\widehat{0}, \widehat{1}, a, b\right\}$ şi $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2(a) = \mathbb{F}_2(b)$, dar $a^2 = b \notin \mathbb{F}_2$, $b^2 = a \notin \mathbb{F}_2$. Aşadar, în cazul $1+1=0$, concluzia de la i) nu mai este adevărată.

PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1)]

Clasa a VII-a

1. Calculaţi suma divizorilor proprii ai lui 36.

2. Daţi un exemplu de număr raţional cuprins între $\dfrac{1}{5}$ şi $\dfrac{1}{6}$.

3. Care dintre numerele $a = -1,23(45)$ şi $b = -1,2(345)$ este mai mic?

4. Cu cât este egală suma elementelor mulţimii

$$\left\{-2;\ 2^3;\ 2^{-2};\left(\frac{2}{3}\right)^0;\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right\} \cap \mathbb{Z}\ ?$$

5. Lungimile laturilor unui triunghi isoscel sunt 4 cm, respectiv 8 cm. Aflaţi perimetrul triunghiului.

6. Care este procentul de promovabilitate, dacă dintre cei 125 de elevi 5 nu au promovat testul de evaluare naţională?

[1)] La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii.

Clasa a VIII-a

7. Care dintre numerele $a = 10\sqrt{2}$ şi $b = 14,5$ este mai mare?

8. Care este valoarea de adevăr a propoziţiei: „Produsul a două numere iraţionale este un număr iraţional“?

9. Media aritmetică a două numere este 4,5. Dacă unul dintre numere este 6,3 aflaţi celălalt număr.

10. Aflaţi numărul de elemente al mulţimii $(-2\ ;\ 4] \cap \mathbb{Z}$.

11. Un triunghi echilateral este echivalent cu un pătrat cu lungimea laturii de 6 cm. Aflaţi aria triunghiului.

12. Ştiind că în triunghiul dreptunghic ABC ($\mathrm{m}(\sphericalangle A) = 90^\circ$), $\sin B = \frac{2}{3}$, calculaţi $\mathrm{tg} B$.

Clasa a IX-a

13. Să se calculeze partea întreagă a numărului :

$$\frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{2}{5\cdot 7} + \frac{2}{7\cdot 9}.$$

14. Daţi un exemplu de număr raţional din intervalul $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$.

15. Să se arate că partea fracţionară a lui $\sqrt{21}$ este mai mare decât $\frac{1}{2}$.

16. Să se arate că $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} < 2$.

17. Daţi un exemplu de număr iraţional x cu proprietatea că $x^2 - 3x$ este număr raţional.

18. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $[x] = [x+a]$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Clasa a X-a

19. Să se calculeze partea întreagă a numărului $\sqrt[4]{1000}$.

20. Să se compare numerele $0,1^{0,2}$ şi $0,2^{0,1}$.

21. Să se rezolve inecuaţia $(\sqrt{0,25}\,)^{2x+1} > 2^{3-x}$.

22. Să se arate că $\sqrt[3]{3} > \sqrt[8]{8}$.

23. Să se arate că $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt{2}$ este număr întreg.

24. Să se arate că $\sqrt{2} < \log_2 3 < 2$.

Clasa a XI-a

25. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & a & 1 & b & c \end{pmatrix}$ o peermutare de ordin 5.

a) Să se calculeze $a+b+c$.

b) Să se determine a ştiind că $\sigma\left(\sigma(2)\right) = 5$.

c) Să se determine tripletele (a, b, c) pentru care σ este permutare pară.

26. Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general:

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}.$$

a) Să se calculeze $\frac{x_5}{x_4}$.
b) Să se arate că $x_1 \geq x_n$, oricare ar fi $n \geq 1$.
c) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

Clasa a XII-a

27. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ definim legea de compoziţie $x * y = xy + x + y$.
a) Să se arate că legea $*$ are element neutru.
b) Să se arate că legea $*$ este asociativă.
c) Să se arate că dacă $x, y, z \in (-\infty, -1)$, atunci $x * y * z \in (-\infty, -1)$.

28. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ şi F o primitivă a sa.

a) Să se calculeze $\int f(x)\mathrm{d}x$.

b) Să se calculeze $F(1) - F(0)$.

c) Să se determine primitiva funcţiei $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$, care se anulează în punctul $x = 2$.

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR[1)]

P:398. Aflaţi suma numerelor a, b, c, ştiind că:

$$a + b = 38 \text{ şi } a \times c + b \times c = 76.$$

Iuliana Drăgan, Bucureşti

P:399. O pisică se caţără pe o bară metalică de metal. Cu fiecare metru parcurs, ea alunecă 20 cm. Câţi metri a parcurs pisica, dacă a alunecat în total 2 metri?

Fănica Ştergărel, Tufeşti, Brăila

P:400. Găsiţi numărul natural $\overline{abcd}$ pentru care:

$$\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2012.$$

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

P:401. Mama are triplul vârstei fiicei. Peste 12 ani mama va avea dublul vârstei fiicei sale. Ce vârstă are fiecare?

Iuliana Drăgan, Bucureşti

[1)] Se primesc soluţii până la 28 februarie 2012 (data poştei). (N.R.)