NOTĂ ASUPRA UNEI PROBLEME DE ALGEBRĂ

DAN SCHWARZ[1)]

Abstract. A viewpoint on the real functions whose translations form a semigroup.

Keywords: Grup, semigroup, function.
MSC : 12E20

La Faza pe Sector, Bucureşti, a Olimpiadei de Matematică 2010, la clasa a XII-a, a fost propusă următoarea:

Problemă. *Să se determine grupurile de forma* $\left(\int f(x)\mathrm{d}x, \circ\right)$*, unde* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este o funcţie care admite primitive, iar „*$\circ$*” este compunerea funcţiilor.*

Marcel Ţena, Bucureşti

Soluţie.[2)] Vom demonstra, în condiţii mult mai generale, că fiind dată o funcţie reală $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisface $\varphi(0) = 0$, submulţimea de funcţii reale $\{\varphi + y \ ; \ y \in \mathbb{R}\}$ este monoid (semigrup cu element neutru) faţă de operaţia „$\circ$” de compunere a funcţiilor dacă şi numai dacă $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, adică $\varphi(x) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Aceasta rezolvă problema propusă, căci luând F acea primitivă a lui f pentru care $F(0) = 0$, avem $\int f(x)\mathrm{d}x = \{F + C \ ; \ C \in \mathbb{R}\}$. Atunci $F(x) = x$, deci $f(x) = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. ∎

Să definim pe mulţimea $\mathcal{F} = \{f \ ; \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ a funcţiilor reale, relaţia $f_1 \sim f_2$ dacă $f_2 - f_1 =$ constantă. Se verifică imediat că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă. Atunci în clasa $\hat{f}$ există exact un reprezentant (canonic) φ cu $\varphi(0) = 0$. Să presupunem acum că $\hat{\varphi}$ este subsemigrup al lui $(\mathcal{F}, \circ)$. Fie $\varphi \circ (\varphi + y) = \varphi + y'$. Calculată în $x = 0$ această relaţie dă $\varphi(y) = y'$, deci $\boxed{\varphi \circ (\varphi + y) = \varphi + \varphi(y)}$ pentru orice y. Calculată în $y = 0$ această relaţie dă $\varphi \circ \varphi = \varphi$, deci şi $(\varphi + y) \circ \varphi = \varphi + y$ pentru orice y, adică φ este element neutru la dreapta. Invers, pentru o funcţie φ care satisface $\varphi(0) = 0$ şi $\boxed{\varphi(\varphi(x) + y) = \varphi(x) + \varphi(y)}$ pentru orice x, y, avem $((\varphi + a) \circ (\varphi + b))(x) =$

$$= (\varphi + a)\left((\varphi + b)(x)\right) = (\varphi + a)(\varphi(x) + b) = (\varphi + (\varphi(b) + a))(x),$$

deci $\hat{\varphi}$ este semigrup.[3)]

Fie acum $K_\varphi = \{k \in \mathbb{R} \ ; \ \varphi(k) = k\}$. Din $\varphi \circ \varphi = \varphi$ rezultă $K_\varphi = \mathrm{Im}\varphi$. Avem $0 \in K_\varphi$ şi $\varphi(k_1 + k_2) = \varphi(\varphi(k_1) + k_2) = \varphi(k_1) + \varphi(k_2) = k_1 + k_2$. De

---

[1)] Profesor, Bucureşti, `dan_schwarz@hotmail.com`

[2)] Alte două soluţii ale acestei probleme pot fi consultate în G.M.-B nr.3/2010, pag. 133.

[3)] De fapt aceasta induce pe $\mathbb{R}$ operaţia asociativă $a * b = a + \varphi(b)$, cu element neutru la dreapta $e = 0$. Verificare $(a * b) * c = a * (b * c) = a + \varphi(b) + \varphi(c)$, $a * 0 = a + \varphi(0) = a$.

asemenea, $0 = \varphi(\varphi(k) + (-k)) = k + \varphi(-k)$, deci $\varphi(-k) = -k$. Rezultă că $\boxed{(K_\varphi, +) \lhd (\mathbb{R}, +)}$, subgrup aditiv al lui $\mathbb{R}$. Cazurile improprii sunt:

- $K_\varphi = \{0\}$, corespunzător la $\varphi = 0$;
- $K_\varphi = \mathbb{R}$, corespunzător la $\varphi = \mathrm{id}_\mathbb{R}$.

Fie $\widehat{y}$ un coset[1)] al lui $\mathbb{R}/K_\varphi$; avem $\varphi(k+y) = k + \varphi(y)$ pentru $k \in K_\varphi$. Atunci funcţia φ este definită ca id[2)] pe K_φ, şi (arbitrar) pe reprezentanţi y ai coseturilor $\hat{y}$, prelungită la tot cosetul prin $\varphi(k+y) = k+\varphi(y)$. Reciproc, orice astfel de funcţie φ îndeplineşte $\varphi(0) = 0$ şi $\boxed{\varphi(\varphi(x) + y) = \varphi(x) + \varphi(y)}$ pentru orice x, y. Funcţia $\varphi(x) = [x]$ este un astfel de exemplu, pentru $K_\varphi = \mathbb{Z}$,[3)] cu $\varphi \neq \mathrm{id}_\mathbb{R}$ (evident atunci semigrupul va fi fără element neutru).

Dar dacă $\{\varphi + y\ ;\ y \in \mathbb{R}\}$ este monoid, atunci $\varphi = \varepsilon \circ \varphi = \varepsilon$ (unde ε este elementul neutru), deci φ este elementul neutru al monoidului. Atunci $\varphi + \varphi(y) = \varphi \circ (\varphi + y) = \varphi + y$ pentru orice y, deci $\varphi = \mathrm{id}_\mathbb{R}$. Pe de altă parte, este clar că pentru $\varphi = \mathrm{id}_\mathbb{R}$ submulţimea respectivă este monoid (chiar grup).

În vederea fazei judeţene a Olimpiadei de Matematică 2010, clasa a XI-a, a fost discutată următoarea:

Problemă. *Să se determine mulţimile $\{f + C\ ;\ C \in \mathbb{R}\}$ care sunt stabile la operaţia „$\circ$” de compunere a funcţiilor, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă.*

Mihai Piticari

Soluţie. Ca mai sus, alegând $f(0) = 0$, avem $0 \in \mathrm{Im}(f) = K_f \lhd \mathbb{R}$, dar şi un interval (eventual degenerat), căci f este continuă. Atunci sau $K_f = \{0\}$, când $\boxed{f = 0}$, sau există un $\varepsilon > 0$ cu intervalul $I = (-\varepsilon, \varepsilon) \subset K_f$, dar atunci avem şi $nI \subset K_f$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci $K_f = \mathbb{R}$ şi $\boxed{f = \mathrm{id}_\mathbb{R}}$. ■

---

1) coset=clasă de echivalenţă

2) id=funcţia identică.

3) Un exemplu mai sofisticat este următorul. Fie $\mathcal{H}$ o bază Hamel a lui $\mathbb{R}$ peste $\mathbb{Q}$, şi $\varphi_0 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ idempotentă, adică $\varphi_0 \circ \varphi_0 = \varphi_0$, dar $\varphi_0 \neq \mathrm{id}_\mathcal{H}$. Prelungim φ_0 prin liniaritate la tot $\mathbb{R}$, prin $\varphi\left(\sum_{i\in I} \alpha_i h_i\right) = \sum_{i \in I} \alpha_i \varphi_0(h_i)$. Atunci evident $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ (φ satisface ecuaţia funcţională *Cauchy*) şi $\varphi \circ \varphi = \varphi$, deci $(\varphi \circ (\varphi + y))(x) = \varphi(\varphi(x) + y) = \varphi(\varphi(x)) + \varphi(y) = \varphi(x) + \varphi(y) = (\varphi + \varphi(y))(x)$. Funcţia idempotentă φ_0 se defineşte astfel: fie $\emptyset \neq \mathcal{A} \subsetneq \mathcal{H}$. Definim $\varphi_0(a) = a$ pentru $a \in \mathcal{A}$ şi arbitrar $\varphi_0(h) \in \mathcal{A}$ pentru $h \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{A}$. Atunci $K_\varphi = < \mathcal{A} >$, subspaţiul vectorial generat de $\mathcal{A}$.