

C.O:5165. Fie $a, b, c, t \in (0, \infty)$. Să se arate că:

$$(a^3 + t)(b^3 + t)(c^3 + t) \geq (a^2b + t)(b^2c + t)(c^2a + t).$$

Dan Nedeianu, Drobeta Turnu Severin

C.O:5166. Să se determine toate numerele reale x pentru care există numerele întregi m și n și numărul natural nenul k , astfel încât:

$$x = \left[\frac{m-n}{k} \right] - \left[\frac{m}{k} \right] + \left[\frac{n}{k} \right],$$

unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a .

Romanța Ghiță și Ioan Ghiță, Blaj

Liceu

C.O:5167. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, pentru care:

- a) $f(xf(y) + y) = yf(x) + f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{N}$;
 b) $f(p)$ este număr prim pentru orice număr prim p .

Marius Măineea, Găiești

C.O:5168. Fie $A = \left\{ \frac{m-n}{\sqrt{m^2-n^2}} \mid m, n \in \mathbb{N}^*, m > n \right\}$. Să se arate că pentru orice $x, y \in A$ cu $x < y$, există $z \in A$ astfel încât $x < z < y$.

Vasile Pop, Cluj-Napoca

C.O:5169. Fie k un număr natural și $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}$,

$$f(x) = x(x+1)(x+2) \cdot \dots \cdot (x+k)(k+3-x).$$

Să se arate că există $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a < b$, unic determinate, astfel încât $f(a) = f(b)$ și să se determine vloearea maximă a funcției f .

Dan Marinescu și Viorel Cornea, Hunedoara

C.O:5170. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine valorile lui n pentru care x_n este număr natural.

Gheorghe Iurea, Iași

PROBLEMS FOR COMPETITIONS AND OLYMPIADS

Junior Level

C.O:5163. Eleven positive integers are given on a circumference such that the sum of any three consecutive numbers do not exceed 19, while the sum of any four consecutive numbers is at least 25. Find the sum of all numbers.

Petre Stângescu, București

C.O:5164. If the positive integers n, x, y, z verify the equation $n^x + n^y = n^z$, then $n = 2$ and $x = y = z - 1$.

I. Cucurezeanu, Constanța

C.O:5165. Let $a, b, c, t \in (0, \infty)$. Show that:

$$(a^3 + t)(b^3 + t)(c^3 + t) \geq (a^2b + t)(b^2c + t)(c^2a + t).$$

Dan Nedeianu, Drobeta Turnu Severin

C.O:5166. Find all real numbers x for which there exist integers m, n and $k > 0$ such that

$$x = \left\lfloor \frac{m-n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor.$$

Romanța Ghiță, Ioan Ghiță, Blaj

Senior Level

C.O:5167. Find all functions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that:

- $f(xf(y) + y) = yf(x) + f(y)$, for all $x, y \in \mathbb{N}$;
- $f(p)$ is a prime for any prime number p .

C.O:5168. Let $A = \left\{ \frac{m-n}{\sqrt{m^2-n^2}} \mid m, n \in \mathbb{N}^*, m > n \right\}$. Show that for all $x, y \in A$ with $x < y$, there exists $z \in A$ such that $x < z < y$.

Vasile Pop, Cluj-Napoca

C.O:5169. Let k be a positive integer and consider $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}$,

$$f(x) = x(x+1)(x+2) \cdot \dots \cdot (x+k)(k+3-x).$$

Show that there exist $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a < b$, uniquely determined, such that $f(a) = f(b)$ and find the maximum value of f .

Dan Marinescu și Viorel Cornea, Hunedoara

C.O:5170. Consider the sequence $\{x_n\}_{n \geq 1}$ defined by $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Find all values of n for which x_n is a positive integer.

Gheorghe Iurea, Iași

ERATĂ

1) La problema E:14043 din G.M. nr. 7-8-9 /2010, în loc de „ $m(\sphericalangle ABC) = 80^\circ$ ” se va citi „ $m(\sphericalangle ABC) = 90^\circ$ ”.

2) La problema 26362 din G.M.-B nr. 10/2010 ecuația este:

$$\frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+3^x} - \frac{1}{1+6^x} = \frac{1}{2}.$$

3) La problema C.O:5153 din G.M.-B nr. 10/2010, în loc de „șirul” se va citi „șirul crescător”.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

În perioada 01 noiembrie-30 noiembrie 2010, au trimis soluții la problemele propuse următorii elevi:

ALBA IULIA (ALBA) Lic. „Adam Müller Guttonbrunn“ cl.V Bodescu Adrian (80), Brenuescu Andreea (80), Fekete Iulia (90), Hell Roberta (80), cl.VI Mariș Mihai Bogdan (80), cl.VII Domjan David (80), Fizedean Mihai (80), Mănăilă Roberto (80), Mănăstureian Diana (80).

BACĂU (BACĂU) Ș. g. „Alexandru Ioan Cuza“ cl.V Balaban Teodora (120), Băliș Ana Maria (120), Bejenaru Victoria (120), Bratu Rebeca (120), Ciobanu Mihai Alexandru (120), Fesan Mara (120), Floarea Radu (120), Gârțu Ștefan (120), Goroneanu Teodora (120), Lupu Ștefan (120), Mândrilă Andrei (120), Mateea Spiță (120), Meheci Tiberiu (120), Neacșu Cristian (120), Neagu Daria (120), Olaru Victor (120), Pavel Teodora Bianca