CONCURSUL NAŢIONAL „LAURENŢIU PANAITOPOL“ ŞI CONCURSUL I.M.A.R.
Bucureşti, 20 noiembrie 2010

prezentare de MIHAIL BĂLUNĂ[1)]

Ediţia a treia a concursului de matematică „Laurenţiu Panaitopol“ a avut loc pe 20 noiembrie 2010. La fel ca în anii precedenţi, el a fost organizat de filiala Bucureşti a Societăţii de Ştiinţe Matematice din România şi Colegiul Naţional „Spiru Haret“ din Bucureşti; în paralel s-a desfăşurat concursul Institutului de Matematică al Academiei Române. La cele două competiţii au participat în jur de 500 de elevi: la gimnaziu s-a concurat pe clase, la liceu s-a concurat pe grupe de clase, iar concursul I.M.A.R. s-a adresat aspiranţilor la loturile de matematică – juniori şi seniori.

Subiectele de concurs au fost selectate de *Mircea Fianu* (gimnaziu), *Ionuţ Onişor* şi *Mihail Bălună* (liceu) şi *Călin Popescu* (I.M.A.R.).

Prezentăm în continuare enunţurile problemelor şi premianţii concursului.

Clasa a VI-a

1. Într-o clasă sunt 6 băieţi şi 18 fete. La un test, media notelor băieţilor a fost 8, iar media notelor fetelor a fost 8,(3). Notele primite de elevi au fost numere naturale nenule mai mici sau egale cu 10.

a) Calculaţi media notelor tuturor elevilor din clasă.

b) Arătaţi că cel puţin doi băieţi au primit la test aceeaşi notă.

* * *

2. Determinaţi numărul natural scris în baza 10 cu trei cifre care, împărţit la răsturnatul său, dă câtul 4 şi restul 117.

* * *

3. Aflaţi toate numerele naturale n pentru care $\dfrac{5}{6} < \dfrac{20}{n+1} < \dfrac{7}{8}$.

* * *

4. Paul, mama sa şi bunicul său au împreună 90 ani. Peste doi ani mama va avea vârsta de 8 ori mai mare decât vârsta lui Paul, iar bunicul va avea vârsta de două ori mai mare decât vârsta actuală a mamei. Ce vârstă are fiecare persoană în prezent?

* * *

Clasa a VII-a

1. Determinaţi numerele naturale a, b şi $A = 2^a \cdot 3^b$, ştiind că numărul $2 \cdot A$ are cu 3 divizori mai mulţi decât A, iar $3 \cdot A$ are cu 4 divizori mai mulţi decât A.

* * *

[1)] Profesor, Colegiul Naţional „Mihai Viteazul", Bucureşti

2. Se consideră numerele $x = \dfrac{3n+2}{4}$ şi $y = \dfrac{28}{3n+1}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

a) Verificaţi dacă numerele x şi y pot fi simultan numere naturale.

b) Determinaţi numerele naturale n pentru care $x \cdot y \in \mathbb{N}$.

$* * *$

3. Fie mulţimea $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_8\} \subset \mathbb{Z}$. Suma elementelor din mulţimea A este egală cu 0. Fiecare element $x_i \in A$, $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, se înmulţeşte cu suma celorlalte elemente din A şi se obţine produsul P_i. Definim $S_A = P_1 + P_2 + \ldots + P_8$.

a) Arătaţi că $S_A < 0$;

b) Determinaţi mulţimile A cu proprietăţile că $S_A = -200$, iar modulele elementelor din A sunt distincte şi cel mult egale cu 8.

$* * *$

4. Fie M mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ascuţitunghic ABC. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ se construiesc, în exterior, triunghiurile isoscele ABD şi ACE astfel încât $AB = AD$, $AC = AE$, iar unghiurile $\sphericalangle DAB$ şi $\sphericalangle CAE$ să fie suplementare. Demonstraţi că $AM = \dfrac{1}{2} \cdot DE$.

$* * *$

Clasa a VIII-a

1. a) Aflaţi numerele întregi a şi b astfel încât $\left(\sqrt{2}+1\right)^{-2} = a + b\sqrt{2}$.

b) Arătaţi că $\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^5 < 0,001$.

$* * *$

2. Se consideră numerele reale pozitive a şi b.

a) Demonstraţi că $\dfrac{\sqrt{a}}{b+1} + \dfrac{\sqrt{b}}{a+1} \geq \dfrac{\sqrt{a}}{a+1} + \dfrac{\sqrt{b}}{b+1}$.

b) Determinaţi numerele a şi b ştiind că $\dfrac{\sqrt{a}}{a+1} + \dfrac{\sqrt{b}}{b+1} \geq 1$.

$* * *$

3. Aflaţi numerele reale x care verifică relaţia $\left|4x^2 - 1\right| + |4x - 5| \leqslant 3$.

$* * *$

4. Se consideră triunghiul isoscel ABC, $m(\sphericalangle A) = 90°$ şi punctul E exterior triunghiului astfel încât $m(\sphericalangle BEC) = 135°$.

a) Arătaţi că triunghiul AEB este isoscel.

b) Punctul D este mijlocul segmentului $[BC]$, H este proiecţia punctului E pe dreapta BC, iar J este proiecţia punctului A pe dreapta DE. Demonstraţi că $HJ = AD$.

$* * *$

Clasele IX - X

1. Fie triunghiul ABC, cu $AB < AC$ şi D piciorul bisectoarei din A. Pe semidreptele $(CA$ şi $(BA$ luăm punctele P, respectiv Q astfel încât $CP = AB$ şi $BQ = AC$. Notăm M intersecţia dreptei PQ cu BC.

a) Arătaţi că dreptele PQ şi AD sunt paralele.

b) Arătaţi că $BD = MC$.
c) Arătaţi că AD este medie geometrică între MP şi MQ.

* * *

2. Considerăm şirul numerelor naturale care nu sunt pătrate perfecte, aşezate în ordine crescătoare: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, ... Arătaţi că al n-lea termen din acest şir este $n + \left[\frac{1}{2} + \sqrt{n}\right]$, oricare ar fi $n \geq 1$.

* * *

3. Pe o tablă de şah sunt 33 de jetoane, aşezate în pătrăţele distincte. Arătaţi că există cel puţin 5 jetoane care sunt situate, două câte două, pe linii şi coloane diferite.

* * *

4. a) Arătaţi că numărul 2010! este divizibil cu 3^{1000}.
b) Arătaţi că $(2010!)^3 + 3^{2010}$ nu este pătrat perfect.

* * *

Clasele XI - XII

1. Câte numere dintre $1, 2, \ldots, 2010$ se pot exprima în forma:

$$[2x] + [4x] + [6x] + [8x], x \in \mathbb{R} \ ?$$

* * *

2. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ care sunt mărginite şi au proprietatea: pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$, $f(xy) + f(x + y) = f(x)f(y) + 1$.

* * *

3. a) Rezolvaţi ecuaţia $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} = 3 - 4\sin^2 x$.
b) Arătaţi că $\displaystyle\prod_{k=0}^{1024}\left(4\sin^2\frac{k\pi}{2048} - 3\right) = 3$.

* * *

4. Pentru fiecare număr natural $n > 1$ notăm cu d_n numărul divizorilor săi pozitivi şi cu s_n suma acestora. Arătaţi că $d_n\sqrt{n} < s_n < n\sqrt{2d_n}$.

* * *

Concursul I.M.A.R. (testul de tip baraj)

1. Arătaţi că un şir $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ai cărui termeni sunt ± 1 este periodic, cu perioada principală 2^r, dacă şi numai dacă $\varepsilon_n = (-1)^{P(n)}, n \in \mathbb{N}$, unde P este un polinom cu coeficienţi raţionali astfel încât $r = \min\{s \mid 2^s > \deg P\}$.

* * *

2. Cercul $\mathcal{C}$ înscris în triunghiul ABC este tangent la BC în D, iar un cerc care trece prin B şi C este tangent la $\mathcal{C}$ în E. Arătaţi că DE trece prin centrul cercului exînscris triunghiului ABC relativ la A.

* * *

3. Dându-se un întreg $n \geq 2$, un număr real A şi $n+1$ puncte distincte în plan $X_0, X_1, \ldots, X_n$, arătaţi că numărul triunghiurilor $X_0X_iX_j$ de arie A este cel mult $4n\sqrt{n}$.

* * *

4. Se consideră un întreg $r > 0$ şi se notează cu N_r cel mai mic număr natural pentru care toate numerele $\frac{N_r}{n+r}\binom{2n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, sunt întregi. Arătaţi că $N_r = \frac{r}{2}\binom{2r}{r}$.

* * *

Primii clasaţi în concurs au fost, în ordine:

– clasa a VI-a: *Teodorescu Ioana* (Şcoala nr. 97, Bucureşti), *Zecheru Daniela* (C. N. „Al. I. Cuza", Ploieşti), *Parfenie Ovidiu* (ICHB), *Ciobotia Ioana* (ICHB), *Grosu Octavian* (Şcoala nr. 172, Bucureşti);

– clasa a VII-a: *Hristescu Daniel* (ICHB), *Niţă Lucian* (Şcoala nr. 97, Bucureşti), *Pană Andreea* (ICHB);

– clasa a VIII-a: *Diaconu Simona* (ICHB), *Maican Marius* (Şcoala nr. 172, Bucureşti), *Iorgulescu Tiberiu* (C. N. „Mircea cel Bătrân", Constanţa);

– clasele IX-X: *Voroneanu Radu* (cl. X, C. N. „I. L. Caragiale", Ploieşti), *Popescu Mihai* (cl. X, C. N. „Mircea cel Bătrân", Constanţa), *Vlad Costin* (cl. IX, C. N. „Mihai Viteazul", Ploieşti), *Turcu Denis* (cl. IX, ICHB);

– clasele XI-XII: *Băltărigă Alexandru* (cl. XI, L. T. „Constantin Brâncoveanu, Dăbuleni), *Sevastian Denisse* (cl. XI, C. N. „Mihai Viteazul", Ploieşti), *Popescu Mihai* (cl. XII, C. N. „Gheorghe Şincai", Bucureşti);

– IMAR: *Cerrahoğlu Ömer* (cl. IX, C. N. „Gheorghe Şincai", Baia-Mare), *Bumbăcea Radu* (cl. XI, C. N. „Tudor Vianu", Bucureşti), *Drăgoi Octav* (cl. XI, ICHB), *Tran Bach Hai* (cl. IX, ICHB).

PREMIANŢII OLIMPIADEI NAŢIONALE DE MATEMATICĂ

Iaşi, Aprilie 2010[1)]

Clasa a VII-a

Bocanu Marius (Şc. cu clasele I-VIII nr. 1, Piteşti), *Fetoiu Cătălin Emil* (Şc. gen. „I. G. Duca", Petroşani), *Popa Vlad* (C. N. „Ferdinand", Bacău), *Aleca Daniel Adrian* (C. N. „Mircea cel Bătrân", Constanţa), *Cora Radu* (Şc. cu clasele I-VIII „Dacia", Oradea), *Ilie Andrei Cătălin* (C. N. „Mihai Viteazul", Ploieşti), *Popa Andreea* (C. N. „Nicolae Bălcescu", Brăila), *Puiu Andrei Bogdan* (C. N. Vasile Alecsandri", Galaţi), *Truţă Mihai* (Şc. cu clasele I-VIII „Hermann Oberth", Mediaş), *Iorgulescu Tiberiu Ionuţ* (C. N. „Mircea cel Bătrân", Constanţa), *Spătaru Ştefan* (Şc. „Mihai Viteazul", Alexandria),

[1)] Sunt trecuţi doar elevii care au obţinut medaliile de aur şi de argint. Din nefericire, Redacţia nu a putut obţine lista elevilor premiaţi de la clasa a XII-a.