GAZETA MATEMATICĂ

REVISTĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ PENTRU TINERET

SERIA B

Fondată în anul 1895

ANUL CXIV nr. 5 **mai 2009**

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

GENERALIZAREA UNEI PROBLEME A PROFESORULUI EUGEN RUSU

de Ionel Tudor[1)]

Abstract. .

Keywords: .

MSC : 26A06.

În anul 2008 am sărbătorit centenarul naşterii academicianului profesor *Nicolae Victor Teodorescu* (5/18.07.1908 – 7.03.2000). S-a născut la Bucureşti şi a urmat liceele „Spiru Haret" şi „Titu Maiorescu" (actualul „Ion Luca Caragiale") tot în Bucureşti. În vacanţe venea des la Giurgiu, unde avea prieteni şi rude, bunicii locuind în satul Chiriacu, comuna Izvoarele, judeţul Giurgiu.

Tot în anul 2008 au trecut 25 de ani de la trecerea în nefiinţă a cunoscutului profesor *Eugen Rusu* (15.12.1910 – 7.05.1983), specialist în metodica şi pedagogia matematicii.

În prezenta notă, dăm o generalizare a unei probleme considerată de profesorul *Rusu*, vom prezenta mai multe aplicaţii şi în final vom prezenta condiţiile stabilite de *Nicolae Teodorescu*, pentru care reciproca cunoscutei teoreme a lui Morley este adevărată.

În Gazeta Matematică nr.2/1962, a fost publicată:

Problema E:1796. *Se dă triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ şi* $\mathrm{m}\left(\widehat{A}\right) = 20^\circ$. *Pe (AC) se ia un punct M, iar pe (AB) un punct N, astfel încât* $\mathrm{m}\left(\sphericalangle ABM\right) = 20^\circ$ *şi* $\mathrm{m}(\sphericalangle ACN) = 30^\circ$. *Să se calculeze* $\mathrm{m}\left(\sphericalangle BMN\right)$.

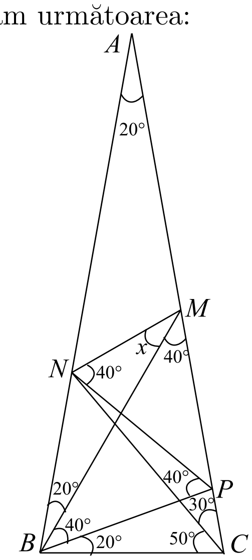
Comentariu. Problema a fost propusă spre rezolvare de profesorul *Eugen Rusu*, la o conferinţă metodică ţinută cu profesori, în cadrul unor cursuri

[1)]Profesor, Grup Şcolar Agricol Călugăreni, Judeţul Giurgiu

de vară. Dintre cei şaizeci de cursanţi, nici unul nu a rezolvat problema imediat ([1], pag.18).

În G.M nr.12/1963, sunt prezentate trei soluţii geometrice ale acestei probleme. Alte soluţii geometrice au mai dat americanul *Coxeter* în 1967 ([2]) şi rusul *Şarâghin* în 1982 ([3]). Soluţiile lui *Rusu*, *Coxeter* şi *Şarâghin* au fost reluate într-un articol publicat de profesorul *Horea Banea* în nr. 3/2001, al revistei „Foaie Matematică" care apare la Chişinău ([4]), precum şi în lucrarea „Din peripeţiile unui rezolvitor de probleme" a autorului *Gheorghe Mitroaica* ([5]). O soluţie care foloseşte intersecţia diagonalelor în poligonul regulat cu 18 laturi, a fost dată de profesorii *Vasile Şerdean* şi *Viorel Lupşor* în „Lucrările Seminarului de Didactica Matematicii" vol.19/2003([6]).

La nivelul actualei programe de gimnaziu, prezentăm următoarea:



Soluţie. Ducem $P \in (AC)$ astfel încât $m(\sphericalangle PBC) = 20°$. Atunci $BP = BC$, deoarece triunghiul BPC este isoscel având $m(\sphericalangle BPC) = m(\sphericalangle BCP) = 80°$. În triunghiul BNC, avem $m(\widehat{B}) = 80°$ şi $m(\sphericalangle BCN) = 50°$. Rezultă $m(\sphericalangle BNC) = 50°$, deci şi triunghiul BNC este isoscel şi avem $BC = BN$.

Astfel triunghiul BNP este echilateral având $m(\sphericalangle NBP) = 60°$ şi $BN = BP$. Triunghiul BPM este isoscel, având $m(\sphericalangle MBP) = m(\sphericalangle NBP) - m(\sphericalangle NBM) = 60° - 20° = 40°$ iar $m(\sphericalangle BMP) = m(\sphericalangle BMC) = 180° - m(\sphericalangle MBC) - m(\sphericalangle BCM) = 180° - 60° - 80° = 40°$, deci $\sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle BMP$ şi $PM = PB$. Dar $PB = PN$, deoarece BNP este triunghi echilateral. Rezultă $PM = PN$, deci şi triunghiul PMN este isoscel.

Cum $m(\sphericalangle MPN) = 180° - m(\sphericalangle BPN) - m(\sphericalangle BPC) = 180° - 60° - 80° = 40°$, avem $m(\sphericalangle PMN) = m(\sphericalangle PNM) = \dfrac{180° - 40°}{2} = 70°$. Măsura unghiului cerut este $x = m(\sphericalangle BMN) = 70° - m(\sphericalangle BMP) = 70° - 40° = 30°$.

În rezolvare am folosit construcţia punctului $P \in (AC)$ cu proprietatea $(BP) \equiv (BC)$.

Cele mai multe dintre problemele asemănătoare apărute în literatura de specialitate, se rezolvă sintetic, tot prin construcţii auxiliare ingenioase.

Prezentăm acum următoarea:

Generalizare. *Într-un triunghi ABC, în care cunoaştem $A = m(\widehat{A})$, $B = m(\widehat{B})$, $C = m(\widehat{C})$ se consideră punctele $D \in (AC)$ şi $E \in (AB)$ astfel încât $m(\sphericalangle ABD) = \alpha < B$ şi $m(\sphericalangle ACE) = \beta < C$.*

Să se determine $x = m(\sphericalangle BDE)$ în funcţie de A, B, C, α şi β.

Soluţie trigonometrică: Vom găsi o formulă de calcul pentru $\operatorname{tg} x$, prin aplicarea teoremei sinusurilor de cinci ori, succesiv, în triunghiurile AED, ABD, BDC, BDE şi BEC:

În $\triangle AED$ avem:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{DE}{\sin A}=\dfrac{AD}{\sin(\sphericalangle AED)}\\ \mathrm{m}(\sphericalangle AED)=x+\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow DE=\frac{\sin A}{\sin(x+\alpha)}\cdot AD. \tag{1}$$

În $\triangle ABD$ avem:

$$\frac{AD}{\sin\alpha}=\frac{BD}{\sin A}\Rightarrow AD=\frac{\sin\alpha}{\sin A}\cdot BD. \tag{2}$$

În $\triangle BDC$ avem:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{BD}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin(\sphericalangle BDC)}\\ \mathrm{m}(\sphericalangle BDC)=A+\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow BD=\frac{\sin C}{\sin(A+\alpha)}\cdot BC. \tag{3}$$

Din (1), (2) şi (3) rezultă $DE=\dfrac{\sin A}{\sin(x+\alpha)}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin A}\cdot\dfrac{\sin C}{\sin(A+\alpha)}\cdot BC$ şi după simplificări obţinem:

$$DE=\frac{\sin\alpha\cdot\sin C}{\sin(x+\alpha)\cdot\sin(A+\alpha)}\cdot BC. \tag{$*$}$$

În $\triangle BDE$ avem:

$$\frac{DE}{\sin\alpha}=\frac{BE}{\sin x}\Rightarrow DE=\frac{\sin\alpha}{\sin x}\cdot BE. \tag{4}$$

În $\triangle BEC$ avem:

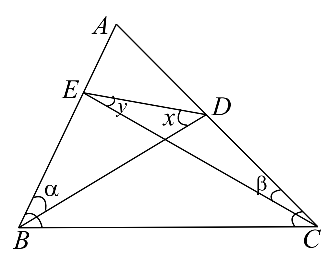
$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{BE}{\sin(C-\beta)}=\dfrac{BC}{\sin(\sphericalangle BEC)}\\ \mathrm{m}(\sphericalangle BEC)=A+\beta\end{array}\right\}\Rightarrow BE=\frac{\sin(C-\beta)}{\sin(A+\beta)}\cdot BC. \tag{5}$$

Din (4) şi (5) rezultă:

$$DE=\frac{\sin\alpha\cdot\sin(C-\beta)}{\sin x\cdot\sin(A+\beta)}\cdot BC. \qquad (**)$$

Din $(*)$ şi $(**)$ rezultă:

$$\frac{\sin\alpha\cdot\sin C}{\sin(x+\alpha)\cdot\sin(A+\alpha)}\cdot BC=$$
$$=\frac{\sin\alpha\cdot\sin(C-\beta)}{\sin x\cdot\sin(A+\beta)}\cdot BC,$$



iar după simplificarea cu $\sin\alpha\neq 0$ şi BC $\neq 0$ obţinem egalitatea:

$$\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin x}=\frac{\sin(A+\beta)\cdot\sin C}{\sin(A+\alpha)\cdot\sin(C-\beta)}.$$

Folosind dezvoltarea $\sin(x+\alpha)=\sin x\cdot\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\cos x$ şi notând $k=\dfrac{\sin(A+\beta)\cdot\sin C}{\sin(A+\alpha)\cdot\sin(C-\beta)}\in\mathbb{R}$, rezultă $\sin\alpha\cdot\mathrm{ctg}x+\cos\alpha=k$, iar de aici formula : $\mathrm{tg}x=\dfrac{\sin\alpha}{k-\cos\alpha}$, unde $k=\dfrac{\sin(A+\beta)}{\sin(A+\alpha)}\cdot\dfrac{\sin C}{\sin(C-\beta)}$.

Observaţii. 1. Cunoscând $x=\mathrm{m}(\sphericalangle BDE)$ se pot determina şi $\mathrm{m}(\sphericalangle ADE)$, $\mathrm{m}(\sphericalangle AED)$ sau $\mathrm{m}(\sphericalangle CED)$. De exemplu $y=\mathrm{m}(\sphericalangle CED)$ rezultă din relaţia $x+y=180^\circ-A-\alpha-\beta$.

De altfel, în unele probleme se cere determinarea unuia dintre aceste unghiuri.

2. În funcţie de valorile arbitrare date lui A, B, C, α şi β (cu respectarea condiţiilor $A+B+C=180^\circ$ şi $\alpha<B$, $\beta<C$) pentru x se poate obţine o valoare „exactă" (număr întreg de grade), însă în cele mai multe dintre cazuri se aproximează x cu valori în grade, minute şi secunde, calculele efectuându-se cu tabele trigonometrice sau calculator.

Aplicaţii

1. Pentru *problema E:1796* de la care am plecat, avem: $A=20^\circ$, $B=C=80^\circ$, $\alpha=20^\circ$ şi $\beta=30^\circ$.

Conform generalizării obţinem:

$$k=\frac{\sin(A+\beta)\cdot\sin C}{\sin(A+\alpha)\cdot\sin(C-\beta)}=\frac{\sin 50^\circ\cdot\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ\cdot\sin 50^\circ}=$$

$$=\frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ}=\frac{2\sin 40^\circ\cdot\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}=2\cos 40^\circ$$

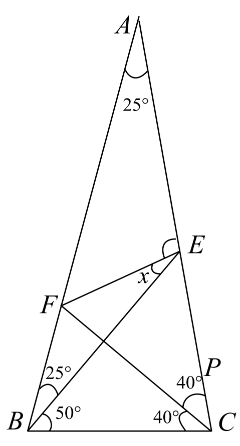
şi apoi:

$$\mathrm{tg}x=\frac{\sin\alpha}{k-\cos\alpha}=\frac{\sin 20^\circ}{2\cos 40^\circ-\cos 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{\cos 40^\circ+(\cos 40^\circ-\cos 20^\circ)}=$$

$$=\frac{\sin 20^\circ}{\cos 40^\circ-2\sin 30^\circ\sin 10^\circ}=$$

$$=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 50^\circ-\sin 10^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ\cos 30^\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\mathrm{tg}30^\circ,$$

deci $x=30^\circ$.



2. *În triunghiul ABC cu* $\mathrm{m}(\widehat{B})=75^\circ$ *şi* $\mathrm{m}(\widehat{C})=80^\circ$, *se consideră punctele* $E\in(AC)$ *şi* $F\in(AB)$ *astfel încât* $\mathrm{m}(\sphericalangle FBE)=25^\circ$ *şi* $\mathrm{m}(\sphericalangle FCB)=40^\circ$. *Să se determine* $\mathrm{m}(\sphericalangle AEF)$. (problema E:12229 din G.M. nr.11/2001, autor *Costin Zălog* şi dată la concursul interjudeţean „Traian Lalescu", Lugoj-2002, [7]).

Soluţie trigonometrică. Avem $A=\mathrm{m}(\widehat{A})==180^\circ-B-C=25^\circ$, $\alpha=25^\circ$, $\beta=40^\circ$. Rezultă:

$$k = \frac{\sin(A+\beta)\sin C}{\sin(A+\alpha)\sin(C-\beta)} = \frac{\sin 65^\circ \sin 80^\circ}{\sin 50^\circ \sin 40^\circ} = \frac{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ \sin 65^\circ}{\sin 40^\circ \sin 50^\circ} =$$

$= \dfrac{2\sin 50^\circ \sin 65^\circ}{\sin 50^\circ} = 2\sin 65^\circ$ şi obţinem :

$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin\alpha}{k-\cos\alpha} = \frac{\sin 25^\circ}{2\sin 65^\circ - \cos 25^\circ} = \frac{\sin 25^\circ}{2\cos 25^\circ - \cos 25^\circ} = \frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ} = \mathrm{tg}25^\circ,$$

deci $x = \mathrm{m}(\sphericalangle BEF) = 25^\circ$.

Din enunţ rezultă $\mathrm{m}(\sphericalangle EBC) = 50^\circ$ şi $\mathrm{m}(\sphericalangle BEC) = 180^\circ - 50^\circ - 80^\circ = 50^\circ$. Atunci $\mathrm{m}(\sphericalangle AEF) = 180^\circ - \mathrm{m}(\sphericalangle BEF) - \mathrm{m}(\sphericalangle BEC) = 180^\circ - x - 50^\circ = 130^\circ - 25^\circ = 105^\circ$, deci $\mathrm{m}(\sphericalangle AEF) = 105^\circ$.

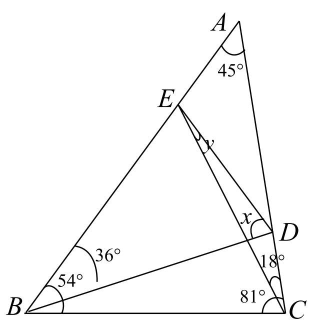
3. *Într-un triunghi ABC cu* $\mathrm{m}(\widehat{A}) = 45^\circ$ *şi* $\mathrm{m}(\widehat{B}) = 54^\circ$, *se consideră punctele* $D \in (AC)$ *şi* $E \in (AB)$ *astfel încât* $\mathrm{m}(\sphericalangle ABD) = 36^\circ$ *şi* $\mathrm{m}(\sphericalangle ACE) = 18^\circ$. *Să se determine* $\mathrm{m}(\sphericalangle BDE)$ *şi* $\mathrm{m}(\sphericalangle CED)$. (*Ionel Tudor* – problemă dată la olimpiada locală, cl. a VI-a, Giurgiu-2006 şi publicată în R.M.T nr. 1/2006).

Soluţie geometrică (fără construcţii ajutătoare). Deducem că $\mathrm{m}(\widehat{C}) = 180^\circ - (45^\circ + 54^\circ) = 81^\circ$. În $\triangle BCD$ avem:

$$\mathrm{m}(\sphericalangle BDC) = 180^\circ - \mathrm{m}(\sphericalangle DBC) - \mathrm{m}(\widehat{C}) = 180^\circ - (54^\circ - 36^\circ) - 81^\circ = 81^\circ.$$

Aşadar $\mathrm{m}(\widehat{C}) = \mathrm{m}(\sphericalangle BDC)$ şi deci $\triangle BCD$ este isoscel. În $\triangle BCE$ avem $\mathrm{m}(\sphericalangle BEC) = 180^\circ - 54^\circ - (81^\circ - 18^\circ) = 126^\circ - 63^\circ = 63^\circ = \mathrm{m}(\sphericalangle BCE)$, deci şi triunghiul BCE este isoscel. Din triunghiurile isoscele BCD şi BCE rezultă $BC = BD = BE$, deci şi triunghiul BDE este isoscel. Atunci avem:

$$\mathrm{m}(\sphericalangle BDE) = \frac{180^\circ - \mathrm{m}(\sphericalangle DBE)}{2} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ.$$



În triunghiul CDE avem:

$$\mathrm{m}(\sphericalangle CED) = 180^\circ - \mathrm{m}(\sphericalangle DCE) - \mathrm{m}(\sphericalangle BDC) - \mathrm{m}(\sphericalangle BDE) = 180^\circ - 18^\circ - 81^\circ - 72^\circ = 9^\circ.$$

Soluţie trigonometrică. Avem $A = 45^\circ$, $B = 54^\circ$, $C = 81^\circ$, $\alpha = 36^\circ$ şi $\beta = 18^\circ$. Întâi obţinem:

$$k = \frac{\sin(A+\beta)\sin C}{\sin(A+\alpha)\sin(C-\beta)} = \frac{\sin 63^\circ \sin 81^\circ}{\sin 81^\circ \sin 63^\circ} = 1,$$

apoi:

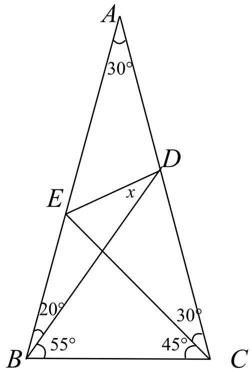
$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin\alpha}{k-\cos\alpha} = \frac{\sin 36^\circ}{1-\cos 36^\circ} = \frac{\sin 36^\circ}{1-(1-2\sin^2 18^\circ)} = \frac{\sin 36^\circ}{2\sin^2 18^\circ} =$$

$$= \frac{2\sin 18^\circ \cos 18^\circ}{2\sin^2 18^\circ} = \frac{\cos 18^\circ}{\sin 18^\circ} = \mathrm{ctg}18^\circ = \mathrm{tg}72^\circ,$$

de unde $x = 72^\circ$, adică $\mathrm{m}(\sphericalangle BDE) = 72^\circ$. Rezultă şi:

$$y = \mathrm{m}(\sphericalangle CED) = 180^\circ - A - \alpha - \beta - x = 180^\circ - 45^\circ - 36^\circ - 18^\circ - 72^\circ = 9^\circ.$$

4. *În triunghiul isoscel ABC cunoaştem*: $A = 30°$, $B = C = 75°$, $\alpha = \mathrm{m}(\sphericalangle ABD) = 20°$ *şi* $\beta = \mathrm{m}(\sphericalangle ACE) = 30°$, *unde* $D \in (AC)$ *şi* $E \in (AB)$. *Să se calculeze* $x = \mathrm{m}(\sphericalangle BDE)$. (*Ionel Tudor*).



Soluţie trigonometrică. În această aplicaţie vom obţine pentru x o valoare care nu se exprimă printr-un număr întreg de grade, dar care este foarte apropiată de 30°. Avem succesiv:

$$k = \frac{\sin(A+\beta)\sin C}{\sin(A+\alpha)\sin(C-\beta)} = \frac{\sin 60° \sin 75°}{\sin 50° \sin 45°} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 50°} = \frac{3+\sqrt{3}}{4 \cdot \sin 50°}$$

$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin\alpha}{k - \cos\alpha} = \frac{\sin 20°}{\dfrac{3+\sqrt{3}}{4\sin 50°} - \cos 20°} = \frac{4\sin 20° \sin 50°}{3+\sqrt{3} - 4\sin 50° \cos 20°} =$$

$$= \frac{2(\cos 30° - \cos 70°)}{3+\sqrt{3} - 2(\sin 30° + \sin 70°)} = \frac{\sqrt{3} - 2\cos 70°}{3+\sqrt{3} - 1 - 2\sin 70°} = \frac{\sqrt{3} - 2\cos 70°}{2+\sqrt{3} - 2\sin 70°}.$$

Folosind calculatorul, avem:

$\sqrt{3} = 1,732050807568877\ldots$, $\sin 70° = 0,939692620785908\ldots$, $\cos 70° = 0,342020143325668\ldots$ şi se găseşte $\mathrm{tg}x = 0,565677195796071...$ de unde $x = (29,4958513029...)°$.

Considerând $(0,1)° = 6'$ şi $(0,01)° = 36''$, rezultă $x = 29°29'45''$.

5. Aplicaţia următoare pune în evidenţă faptul că reciproca cunoscutei teoreme a lui *Morley* nu este adevărată întotdeauna. Teorema lui *Morley* afirmă că perechile de trisectoare ale unghiurilor unui triunghi oarecare, determină în interiorul triunghiului dat un triunghi echilateral. Să rezolvăm următoarea

Problemă. *În triunghiul echilateral ABC cu lungimea laturii a, considerăm punctele $D \in (AC)$, $E \in (AB)$ şi $F \in (BC)$ astfel încât $AD = BE = CF = \dfrac{a}{3}$. Notăm $\{M\} = BD \cap CE$, $\{N\} = BD \cap AF$ şi $\{P\} = AF \cap CE$.*

a) *Să se arate că triunghiul MNP este echilateral.*

b)*Să se determine* $\alpha = \mathrm{m}(\sphericalangle ABD)$ *şi* $x = \mathrm{m}(\sphericalangle BDE)$. (*Ionel Tudor*)

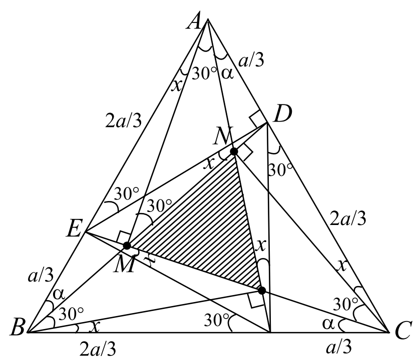
Soluţie. a) Din datele problemei rezultă $\Delta ADE \equiv \Delta BEF \equiv \Delta CFD$ (L.U.L). Deci $DE = EF = FD$ adică triunghiul DEF este echilateral. În triunghiul ADE, cu teorema cosinusului obţinem $DE = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ şi conform reciprocei teoremei lui *Pitagora* rezultă că triunghiul ADE este dreptunghic cu $\mathrm{m}(\sphericalangle ADE) = 90°$ şi $\mathrm{m}(\sphericalangle AED) = 30°$. Atunci $\triangle BED \equiv \triangle CFE \equiv \triangle ADF$ (L.U.L) de unde $\alpha = \mathrm{m}(\sphericalangle EBD) = \mathrm{m}(\sphericalangle FCE) = \mathrm{m}(\sphericalangle DAF)$

şi $x = \mathrm{m}(\sphericalangle BDE) = \mathrm{m}(\sphericalangle CEF) = \mathrm{m}(\sphericalangle AFD)$. Avem şi $\mathrm{m}(\sphericalangle ADM) = \mathrm{m}(\sphericalangle ADE) + \mathrm{m}(\sphericalangle MDE) = 90^\circ + x = \mathrm{m}(\sphericalangle BEF) + \mathrm{m}(\sphericalangle MEF) = \mathrm{m}(\sphericalangle BEM)$. Deoarece $\mathrm{m}(\sphericalangle ADM) = \mathrm{m}(\sphericalangle BEM)$, rezultă că patrulaterul $ADME$ este inscriptibil. Atunci $\mathrm{m}(\sphericalangle AME) = \mathrm{m}(\sphericalangle ADE) = 90^\circ$ şi $\mathrm{m}(\sphericalangle AMN) = \mathrm{m}(\sphericalangle AED) = 30^\circ$, deci $\mathrm{m}(\sphericalangle NMP) = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Din $\mathrm{m}(\sphericalangle AED) = \mathrm{m}(\sphericalangle ABD) + \mathrm{m}(\sphericalangle BDE) = \alpha + x$, ca unghi exterior triunghiului BED, rezultă $\alpha + x = 30^\circ$ şi atunci $\mathrm{m}(\sphericalangle MAN) = 60^\circ - (\alpha + x) = 30^\circ$. Deci $\mathrm{m}(\sphericalangle MNP) = \mathrm{m}(\sphericalangle AMN) + \mathrm{m}(\sphericalangle MAN) = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$, ca unghi exterior triunghiului AMN. Rezultă $\mathrm{m}(\sphericalangle NMP) = \mathrm{m}(\sphericalangle MNP) = 60^\circ$ şi deci triunghiul MNP este echilateral.

b) Determinăm $x = \mathrm{m}(\sphericalangle BDE)$ aplicând formula găsită la *Generalizare* pentru $A = B = C = 60^\circ$ şi $\beta = C - \alpha = 60^\circ - \alpha$. Avem:

$$k = \frac{\sin(A+\beta)\sin C}{\sin(A+\alpha)\sin(C-\beta)} = \frac{\sin(120^\circ - \alpha)\sin 60^\circ}{\sin(60^\circ + \alpha)\sin\alpha} = \cdots = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha}$$

şi apoi: $\mathrm{tg}x = \dfrac{\sin\alpha}{k - \cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha} - \cos\alpha} = \dfrac{2\sin^2\alpha}{\sqrt{3} - 2\sin\alpha\cos\alpha}$.



În triunghiul ABD, cu teorema sinusurilor, obţinem $\sin\alpha = \dfrac{AD}{BD}\cdot\sin 60^\circ = \dfrac{a}{3BD}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6BD}$ şi cu teorema cosinusului găsim $BD = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$. Deci $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ şi $\cos\alpha = \dfrac{5}{2\sqrt{7}}$. Rezultă, după înlocuiri, $\mathrm{tg}x = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

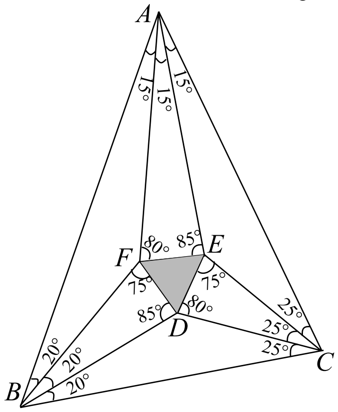
Cu calculatorul, obţinem $x = \mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{9} = \mathrm{arctg}(0,192450089729875...) = (10,89339464858...)^\circ = 10^\circ 53' 36''$.

Cum $\alpha + x = 30^\circ$, rezultă $\alpha = (19,1066053514...)^\circ = 19^\circ 6' 24''$.

Deci $x < 30^\circ$ şi $\alpha < 30^\circ$, fapt ce ne arată că perechile de ceviene considerate nu sunt trisectoare. Cu toate acestea ele determină triunghiul echilateral MNP şi deci putem spune că în general reciproca teoremei lui *Morley* nu este adevărată , chiar şi în cazul triunghiului ABC echilateral (există şi alte perechi de ceviene, nu neapărat trisectoare, care determină un triunghi echilateral în interiorul triunghiului dat).

6. În articolul „Teorema, reciproca şi configuraţia lui Morley" publicat în Gazeta Matematică nr.7/1983, profesorul *Nicolae Teodorescu* stabileşte în ce condiţii este adevărată reciproca teoremei lui *Morley*, demonstrând următoarea teoremă de existenţă şi unicitate:

Teoremă. *Fiind dat un triunghi echilateral DEF, există un singur triunghi ABC cu măsurile unghiurilor* $\alpha = \mathrm{m}(\widehat{A})$, $\beta = \mathrm{m}(\widehat{B})$, $\gamma = \mathrm{m}(\widehat{C})$ *date, astfel încât perechile de trisectoare ale acestuia, să fie concurente două câte două în vârfurile D, E, F ale triunghiului echilateral dat, dacă şi numai dacă au loc relaţiile*: $\mathrm{m}(\sphericalangle AEF) = \mathrm{m}(\sphericalangle BDF) = 60^\circ + \dfrac{\gamma}{3}$, $\mathrm{m}(\sphericalangle AFE) = \mathrm{m}(\sphericalangle CDE) = 60^\circ + \dfrac{\beta}{3}$ şi $\mathrm{m}(\sphericalangle BFD) = \mathrm{m}(\sphericalangle CED) = 60^\circ + \dfrac{\alpha}{3}$.



Exemplu. În interiorul unui triunghi ABC, cu unghiurile $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$ şi $\gamma = 75^\circ$ este situat un triunghi echilateral DEF, astfel încât $\mathrm{m}(\sphericalangle AEF) = \mathrm{m}(\sphericalangle BDF) = 60^\circ + \dfrac{\gamma}{3} = 60^\circ + 25^\circ = 85^\circ$, $\mathrm{m}(\sphericalangle AFE) = \mathrm{m}(\sphericalangle CDE) = 60^\circ + \dfrac{\beta}{3} = 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ$, $\mathrm{m}(\sphericalangle BFD) = \mathrm{m}(\sphericalangle CED) = 60^\circ + \dfrac{\alpha}{3} = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$.

Atunci perechile de ceviene (AE, AF), (BD, BF) şi (CD, CE) sunt trisectoarele triunghiului ABC. Într-adevăr, se găsesc uşor valorile: $\mathrm{m}(\sphericalangle EAF) = \mathrm{m}(\sphericalangle FAB) = \mathrm{m}(\sphericalangle EAC) = 15^\circ = \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{m}(\widehat{A})$, $\mathrm{m}(\sphericalangle DBF) = \mathrm{m}(\sphericalangle FBA) = \mathrm{m}(\sphericalangle DBC) = 20^\circ = \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{m}(\widehat{B})$, $\mathrm{m}(\sphericalangle DCE) = \mathrm{m}(\sphericalangle BCD) = \mathrm{m}(\sphericalangle ACE) = 25^\circ = \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{m}(\widehat{C})$.

În final, mai amintim că în acelaşi articol, profesorul *Nicolae Teodorescu*, dă şi o demonstraţie a teoremei directe a lui *Morley*, pornind de la reciproca teoremei lui *Morley*.

BIBLIOGRAFIE

[1] E. Rusu, *Matematica în liceu –probleme de metodică*, E.D.P., 1970.
[2] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, Toronto-New York, 1967.
[3] I. F. Şarâghin, *Zadaci pa gheometrii*, Nauka,1982.
[4] H. Banea, *Un studiu de caz*, Foaie Matematică, nr.3/2001, Chişinău.
[5] Gh. Mitroaica, *Din peripeţiile unui rezolvitor de probleme*, Ed. Albatros, 1987.
[6] * * * Lucrările seminarului de Didactica Matematicii, vol.19, Cluj-Napoca, 2003.
[7] * * * Olimpiadele şi concursurile de matematică, Ed. Bîrchi, Timişoara, 2002.
[8] * * * Gazeta Matematică, colecţie 1960-2008.