Soluţii comentate ale unor probleme din G.M.–B

Consideraţii metodice asupra unei probleme din Suplimentul *Gazetei Matematice*

de MARIAN HAIDUCU

Prezentăm o abordare analitică şi una sintetică a unei probleme de geometrie din Suplimentul *Gazetei Matematice*, Seria B, nr. 11, 2019. În final, oferim o generalizare.

We present an analytical and a synthetic approach to a geometry problem from the Suplimentul *Gazetei Matematice*, Seria B, nr. 11, 2019. Finally, we offer a generalization.

Considerăm următorul enunţ.

Problema 1. *Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A. Arătaţi că există un unic punct, M, în planul său astfel încât segmentele AM, BM şi CM să fie laturile unui triunghi dreptunghic.*

Mihai Dicu, Problema S:E19.307, Suplimentul G.M.–B. nr. 11, 2019

1. METODA CONTRAEXEMPLULUI

Arătăm că există cel puţin <u>două</u> puncte M_1 şi M_2 cu proprietatea din concluzie.

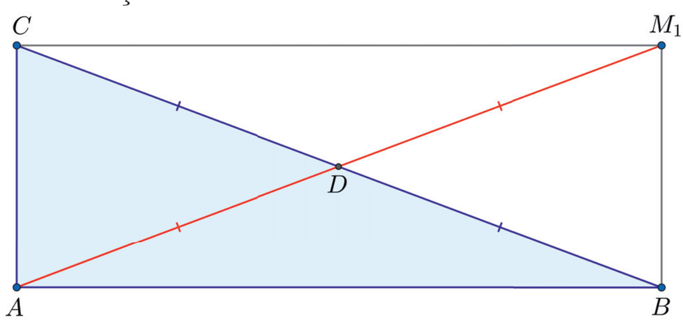
Exemplul 1. Fie M_1, simetricul punctului A faţă de mijlocul D al ipotenuzei $[BC]$. Avem

$$AM_1 = BC, \quad BM_1 = AC, \quad CM_1 = AB, \quad BC^2 = AB^2 + AC^2,$$

de unde rezultă că

$$AM_1^2 = BM_1^2 + CM_1^2,$$

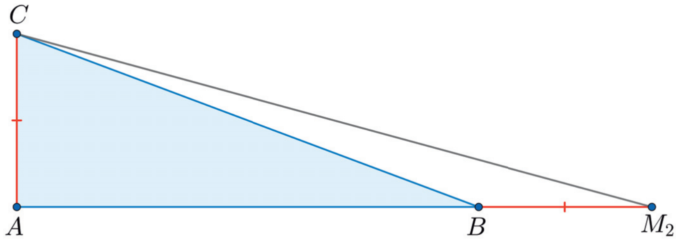
deci M_1 verifică cerinţa!



Exemplul 2. Fie $M_2 \in AB$ astfel încât $B \in (AM_2)$ şi $(BM_2) \equiv (AC)$. Avem

$$M_2C^2 = M_2A^2 + AC^2 = M_2A^2 + M_2B^2,$$

deci M_2 verifică cerinţa.



Observaţia 1. Analog $M_3 \in AC$ astfel încât $C \in (AM_3)$ şi $(CM_3) \equiv (AB)$ este soluţie a problemei.

Observaţia 2. Probleme metodice:

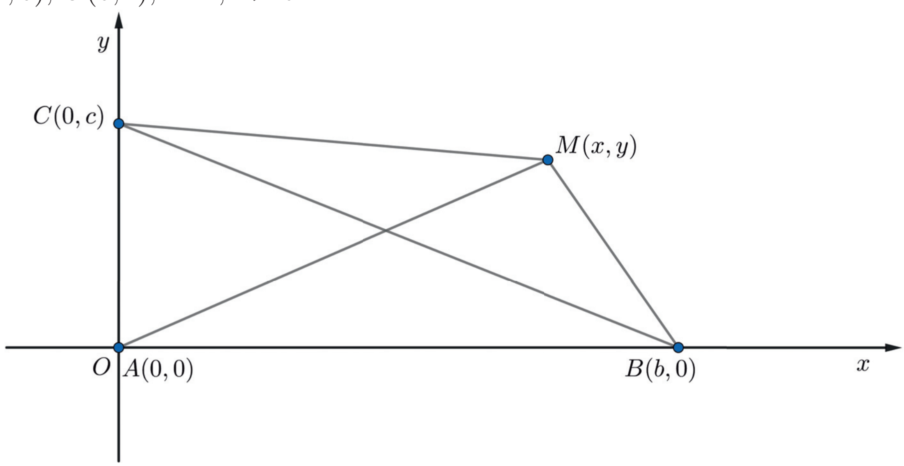
(1) Cum găsim punctele M_2 şi M_3?
(2) Câte puncte M verifică cerinţa?

2. ABORDARE ANALITICĂ

Sunt posibile următoarele trei cazuri.

Cazul 1. AM, BM şi CM sunt laturile unui triunghi dreptunghic de ipotenuză AM.
Cazul 2. AM, BM şi CM sunt laturile unui triunghi dreptunghic de ipotenuză BM.
Cazul 3. AM, BM şi CM sunt laturile unui triunghi dreptunghic de ipotenuză CM.

Considerăm sistemul de coordonate carteziene xOy, în care O este $A(0,0)$, $B(b,0)$, $C(0,c)$, cu $b,c>0$.



Căutăm $M(x,y)$, cu $x,y \in \mathbb{R}$, astfel încât, în fiecare dintre cele trei cazuri, să avem

$$AM^2 = BM^2 + CM^2, \quad BM^2 = CM^2 + AM^2$$

şi, respectiv,

$$CM^2 = AM^2 + BM^2.$$

În toate cele trei cazuri avem

$$AM^2 = x^2 + y^2, \quad BM^2 = (b-x)^2 + y^2, \quad CM^2 = x^2 + (y-c)^2.$$

În cazul 1, $AM^2 = BM^2 + CM^2$, adică

$$x^2 + y^2 = (b-x)^2 + y^2 + x^2 + (y-c)^2,$$

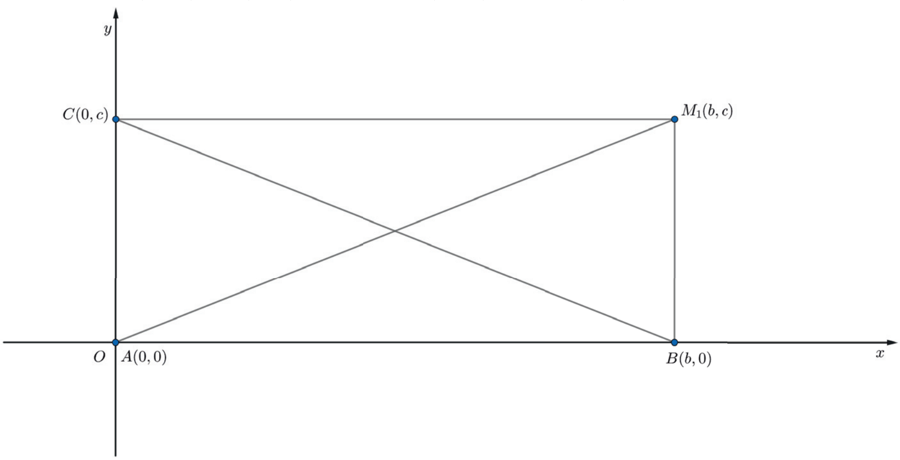
altfel scris

$$x^2 + y^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2 + x^2 + y^2 - 2cy + y^2,$$

adică

$$(x-b)^2 + (y-c)^2 = 0,$$

echivalent cu $(x,y) = (b,c)$, adică $M(x,y) = M_1(b,c)$.



În cazul 2,

$$BM^2 = CM^2 + AM^2,$$

adică

$$(b-x)^2 + y^2 = x^2 + (y-c)^2 + x^2 + y^2,$$

altfel scris

$$b^2 - 2bx + x^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2cy + c^2 + x^2 + y^2,$$

adică

$$x^2 + 2bx - b^2 + y^2 - 2cy + c^2 = 0 \,\Big|\, + 2b,$$

echivalent cu

$$x^2 + 2bx + b^2 + y^2 - 2cy + c^2 = 2b^2,$$

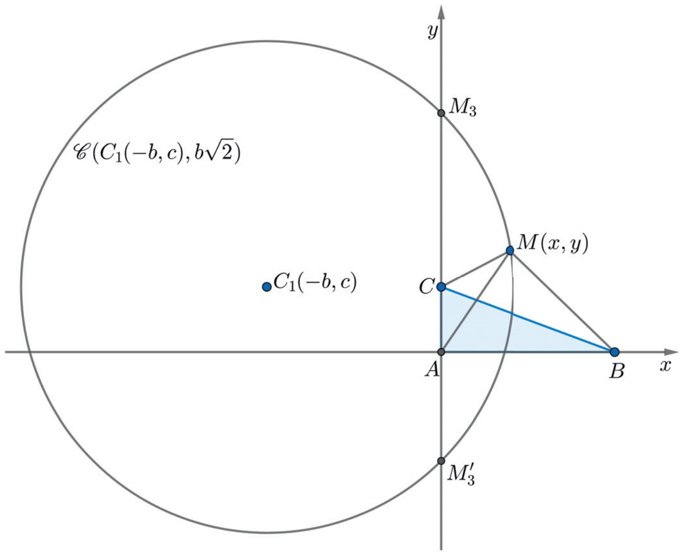
altfel scris

$$(x+b)^2 + (y-c)^2 = \left(b\sqrt{2}\right)^2,$$

adică

$$M(x,y) \in \mathscr{C}\left(C_1(-b,c), b\sqrt{2}\right),$$

unde am notat cu $\mathscr{C}\left(C_1(-b,c), b\sqrt{2}\right)$ cercul de centru $C_1(-b,c)$ şi rază $r_1 = b\sqrt{2}$.



Cazul 3 se tratează analog cazului 2 şi se obţine

$$M(x,y) \in \mathscr{C}\left(C_2(b,-c), c\sqrt{2}\right),$$

unde am notat cu $\mathscr{C}\left(C_2(b,-c), c\sqrt{2}\right)$ cercul de centru $C_2(b,-c)$ şi rază $r_2 = c\sqrt{2}$.

Observaţia 3. Dacă notăm

$$AC \cap \mathscr{C}\left(C_1(-b,c), b\sqrt{2}\right) = \{M_3, M_3'\}$$

şi

$$AB \cap \mathscr{C}\left(C_2(b,-c), c\sqrt{2}\right) = \{M_2, M_2'\},$$

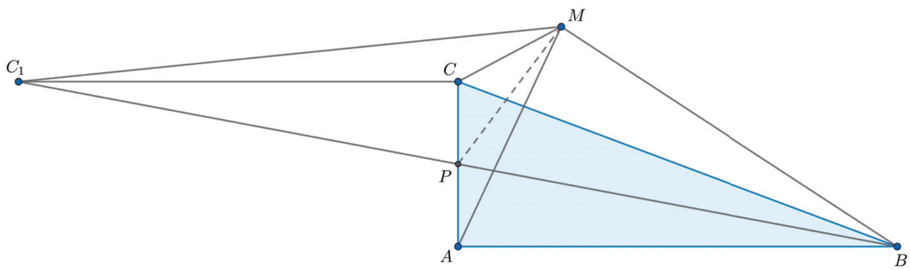
găsim patru puncte particulare, printre care şi punctul M_2 din Exemplul 2.

Am obţinut următorul enunţ corectat.

Problema 2. *Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A. Există o infinitate de puncte M, în planul său, astfel încât segmentele AM, BM şi CM să fie laturile unui triunghi dreptunghic (două cercuri distincte şi un punct).*

3. ABORDARE SINTETICĂ

Fie C_1, simetricul punctului B faţă de mijlocul, P, al lui $[AC]$.



În $\triangle MAC$, $[MP]$ este mediană, deci, conform teoremei medianei, avem

$$PM^2 = \frac{2(AM^2 + CM^2) - AC^2}{4}.$$

În $\triangle C_1BM$, $[MP]$ este mediană, deci, conform teoremei medianei, avem

$$PM^2 = \frac{2(MC_1^2 + MB^2) - BC_1^2}{4}.$$

Rezultă că

$$2(AM^2 + CM^2) - AC^2 = 2(MC_1^2 + MB^2) - \left((2AB)^2 + AC^2\right),$$

adică

$$2AM^2 + 2CM^2 - AC^2 = 2MC_1^2 + 2MB^2 - 4AB^2 - AC^2,$$

echivalent cu

$$2MC_1^2 = 4AB^2,$$

altfel scris

$$MC_1 = AB\sqrt{2},$$

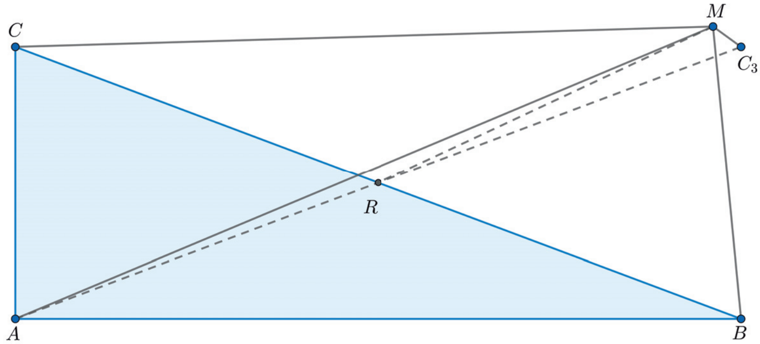
adică

$$M \in \mathscr{C}\left(C_1, r_1 = AB\sqrt{2}\right).$$

Fie C_2, simetricul punctului C faţă de mijlocul Q al lui $[AB]$. Analog, se obţine

$$M \in \mathscr{C}\left(C_2, r_2 = AC\sqrt{2}\right).$$

Fie C_3, simetricul punctului A faţă de mijlocul R al lui $[BC]$. Analog, obţinem $MC_3^2 = 0$, adică $M = C_3$.



În concluzie,

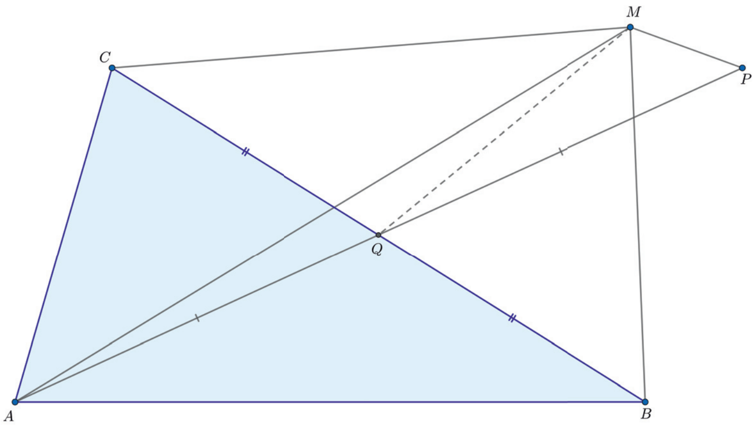
$$M \in \mathscr{C}\left(C_1, r_1 = AB\sqrt{2}\right) \cup \mathscr{C}\left(C_2, r_2 = AC\sqrt{2}\right) \cup \{C_3\}.$$

4. Generalizare

Problema 3. *Fie ABC, un triunghi oarecare. Să se precizeze mulţimea punctelor M din planul triunghiului astfel încât segmentele MA, MB şi MC să fie laturile unui triunghi dreptunghic.*

4.1. Soluţie sintetică

Cazul 1. Căutăm M astfel încât triunghiul să fie dreptunghic, de ipotenuză $[AM]$.



Fie P, simetricul lui A faţă de mijlocul Q al segmentului $[BC]$.
În $\triangle MAP$, $[MQ]$ este mediană, deci, conform teoremei medianei, avem

$$MQ^2 = \frac{2(MA^2 + MP^2) - AP^2}{4}.$$

În $\triangle MBC$, $[MQ]$ este mediană, deci, conform teoremei medianei, avem

$$MQ^2 = \frac{2(MB^2 + MC^2) - BC^2}{4}.$$

Rezultă că

$$2(MA^2 + MP^2) - AP^2 = 2(MB^2 + MC^2) - BC^2,$$

de unde obţinem că

$$2MA^2 + 2MP^2 - AP^2 = 2MB^2 + 2MC^2 - BC^2,$$

ce conduce la

$$MP^2 = AP^2 - BC^2,$$

relaţie pe care o interpretăm, după cum urmează.

(i) Dacă $m(\sphericalangle A) < 90°$, atunci $AP > BC$, de unde $MP^2 = r > 0$, ceea ce înseamnă că $M \in \mathscr{C}\,(P, \sqrt{r}\,)$.

(ii) Dacă $m(\sphericalangle A) = 90°$, atunci $AP = BC$, de unde $MP^2 = 0$, ceea ce înseamnă că $M = P$.

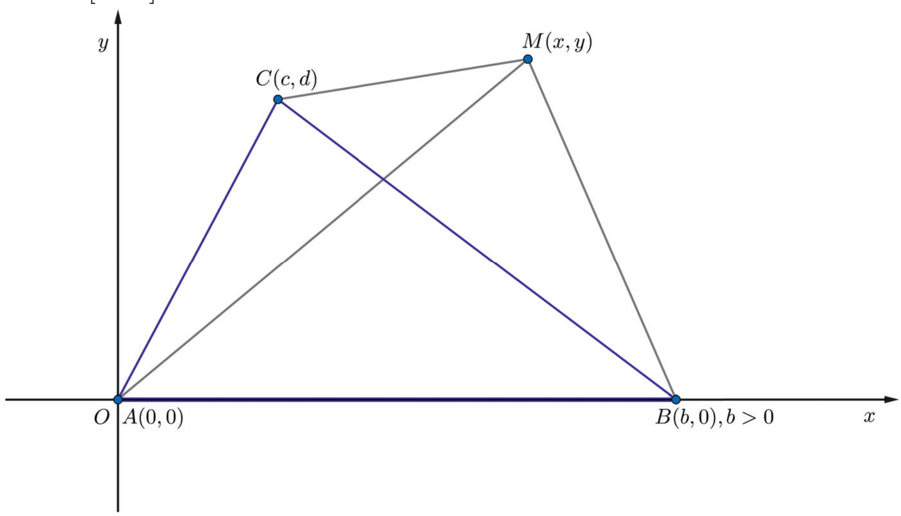
(*iii*) Dacă $m(\sphericalangle A) > 90°$, atunci $AP < BC$, de unde $MP^2 < 0$, neacceptabil, ceea ce înseamnă că nu există puncte, M, în planul triunghiului ABC cu proprietatea $MA^2 = MB^2 + MC^2$.

Cazurile 2) şi **3)** se analizează asemănător, de unde putem trage următoarele concluzii:

(1) dacă $\triangle ABC$ este ascuţitunghic, atunci punctul M se află într-o mulţime formată din reuniunea a trei cercuri;
(2) dacă $\triangle ABC$ este dreptunghic, atunci punctul M se află într-o mulţime formată din reuniunea a două cercuri şi un punct;
(3) dacă $\triangle ABC$ este obtuzunghic, atunci punctul M se află într-o mulţime formată din reuniunea a două cercuri.

4.2. Soluţie analitică

Cazul 1. Căutăm punctul M astfel încât triunghiul să fie dreptunghic, de ipotenuză $[AM]$.



Considerăm $A(0,0)$, $B(b,0)$ şi $C(c,d)$, cu $b > 0$, $c \in \mathbb{R}$, $d > 0$. Atunci

$$AM^2 = x^2 + y^2,$$
$$BM^2 = (x-b)^2 + y^2,$$
$$CM^2 = (x-c)^2 + (y-d)^2,$$

ceea ce înseamnă că

$$BM^2 + CM^2 = AM^2$$

dacă şi numai dacă

$$(x-b)^2 + y^2 + (x-c)^2 + (y-d)^2 = x^2 + y^2,$$

adică

$$x^2 - 2bx + b^2 + y^2 + x^2 - 2cx + b^2 + y^2 - 2dy + d^2 = x^2 + y^2,$$

altfel scris,

$$x^2 - 2(b+c)x + b^2 + c^2 + (y-d)^2 = 0,$$

echivalent cu

$$x^2 - 2(b+c)x + b^2 + 2bc + c^2 + (y-d)^2 = 2bc$$

adică

$$\big(x-(b+c)\big)^2 + (y-d)^2 = 2bc,$$

relaţie care implică următoarea discuţie.

(1) Dacă $c < 0$, adică $m\,(\sphericalangle BAC) > 90^\circ$, atunci $2bc < 0$, neacceptabil (nu există un triunghi dreptunghic cu lungimile laturilor AM, BM şi CM şi ipotenuza AM).

(2) Dacă $c = 0$, adică $m\,(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$, atunci $x = b + c$ şi $y = d$, deci $M(b+c, d)$ (există un unic punct, M, astfel încât AM, BM şi CM sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic, de ipotenuză AM).

(3) Dacă $c > 0$, adică $m\,(\sphericalangle BAC) < 90^\circ$, atunci $2bc > 0$, deci

$$\big(x-(b+c)\big)^2 + (y-d)^2 = \left(\sqrt{2bc}\,\right)^2,$$

ceea ce înseamnă că

$$M(x,y) \in \mathscr{C}\left(C_1(b+c,d), r = \sqrt{2bc}\,\right)$$

(există o infinitate de puncte, M, astfel încât AM, BM şi CM sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic, de ipotenuză AM, şi aceste puncte sunt situate pe un cerc de centru $C_1(b+c,d)$ şi rază $r = \sqrt{2bc}\,$).

Prin urmare, sunt valabile aceleaşi concluzii ca cele enunţate la finalul abordării sintetice.

Cazurile 2) şi **3)** generează abordări similare.

BIBLIOGRAFIE

[1] Colecţia *Gazeta Matematică*, Seria B.

PROF. DR. MARIAN HAIDUCU
ŞCOALA GIMNAZIALĂ „MIHAI EMINESCU”, PITEŞTI
E-mail: marian.haiducu@gmail.com