DIDACTICA MATEMATICĂ

SUPLIMENT AL GAZETEI MATEMATICE

ANUL al X-lea Nr. 2/2020

Probleme rezolvate din manuale

O problemă de extrem geometric

de Eugen Radu

Prezentăm diverse soluţii ale unei probleme de extrem, în contextul unei piramide triunghiulare regulate, dintr-un manual pentru clasa a VIII-a. Soluţiile prezentate apelează la cunoştinţe de algebră şi de analiză matematică, iar problema se găseşte şi într-un manual pentru clasa a XII-a.

We present various solutions to an extreme problem, in the context of a regular triangular pyramid, from an 8th grade textbook. The solutions presented use notions of algebra and mathematical analysis, and the problem can be found in a textbook for the 12th grade.

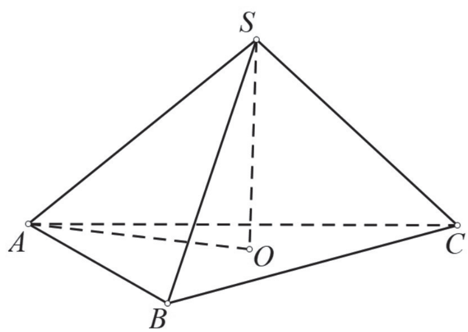
Propunem spre rezolvare o problemă de extrem geometric pe care o putem găsi în manualele [1] şi [2]. Iată enunţul.

Problemă. *Să se afle volumul unei piramide triunghiulare regulate având muchiile laterale egale cu a şi muchiile bazei egale cu x. Pentru ce valori ale lui x se obţine volumul maxim?*

Rezolvările următoare au un spectru larg de adresabilitate, mai precis, elevilor claselor VIII-XII.

Avem nevoie de următoarele rezultate.

Lema 1. *Volumul piramidei este egal cu* $\frac{1}{12}x^2\sqrt{3a^2-x^2}$.



Rezolvare. Fie $SABC$, o piramidă triunghiulară regulată (vezi figura anterioară). Construim $SO \perp (ABC)$, cu $O \in (ABC)$. Atunci punctul O este centrul bazei piramidei şi

$$\mathrm{Vol}(SABC) = \frac{1}{3}\,\mathrm{Aria}(ABC) \cdot SO.$$

Pe de altă parte, avem

$$\mathrm{Aria}(ABC) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{şi} \quad SO = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{3}}.$$

Prin urmare,

$$\mathrm{Vol}(SABC) = \frac{1}{12}\,x^2\sqrt{3a^2 - x^2}. \qquad \square$$

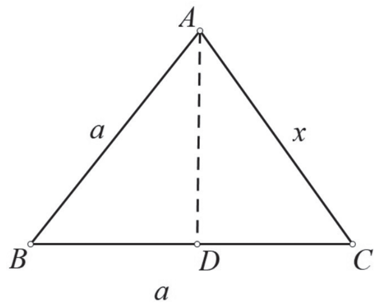
Lema 2. *Fie $I \subset \mathbb{R}$, un interval, şi funcţiile $f, g : I \to \mathbb{R}$. Dacă valorile maxime ale funcţiilor f şi g se obţin pentru aceeaşi valoare a lui x, atunci*

$$\max(f \cdot g) = \max(f) \cdot \max(g).$$

Rezolvare. Fie $x_0 \in I$, punctul comun de maxim. Avem $0 \le f(x) \le f(x_0)$, $0 \le g(x) \le g(x_0)$, pentru orice $x \in I$. Prin înmulţire, obţinem $f(x) \cdot g(x) \le f(x_0) \cdot g(x_0)$, deci $\max(f \cdot g) = f(x_0) \cdot g(x_0)$. $\square$

Observaţie. Pentru veridicitatea concluziei din lema anterioară este esenţial ca x_0 să fie punct comun de maxim. Altfel, avem contraexemplul reprezentat de funcţiile $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}_+$, cu $f(x) = x$ şi $g(x) = 1 - x$. Conform inegalităţii mediilor, $\max(f \cdot g) = \frac{1}{4}$ şi se realizează pentru $x = \frac{1}{2}$, în timp ce $\max(f) = \max(g) = 1$ şi, deci, $\max(f) \cdot \max(g) = 1$.

Lema 3. *Un triunghi isoscel are lungimile laturilor egale cu a, a şi x. Pentru ce valoare a lui x se atinge maximul ariei triunghiului?*



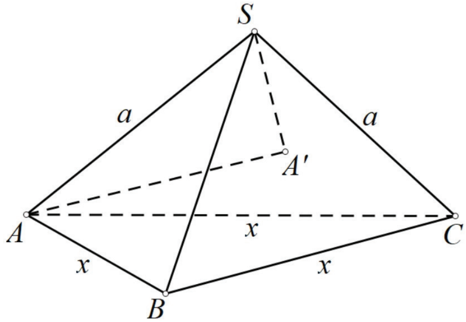
Rezolvare. Fie punctul D, piciorul înălţimii din vârful A. Avem $\mathrm{Aria}(ABC) = \frac{1}{2}BC \cdot AD$. Maximul ariei se realizează când AD este maxim. Însă $AD \le AB$ este echivalent cu $\max(AD) = a$, adică $m(\sphericalangle ABC) = 90°$, echivalent cu $x = a\sqrt{2}$, caz în care triunghiul este isoscel. $\square$

Observaţie. Problema noastră, de maxim al volumului piramidei, este analogul în spaţiu al problemei plane din lema precedentă.

Lema 4. *Se consideră numerele pozitive* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, pentru care suma* $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = c$*, constantă, şi numerele raţionale pozitive* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$*, fixate. Atunci produsul* $x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ *este maxim dacă şi numai dacă* $\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{x_n}{\alpha_n}$.

Rezolvare. Se poate găsi în [3]. □

Revenim, acum, la problema iniţială. Să aflăm valoarea lui x pentru care volumul piramidei este maxim.



Rezolvarea 1 (clasa a VIII-a). Fie $AA' \perp (SBC)$, cu $A' \in (SBC)$ (vezi figura anterioară). Atunci

$$\mathrm{Vol}(SABC) = \frac{1}{\ }$$

$\overline{\ \ }_{2}$ şi se realizează pentru $x = a\sqrt{2}$ (vezi lema 3).

Observăm, de asemenea, că $AA' \leq AB$ şi, deci, $\max(AA') = AS$, echivalent cu $AS \perp (SBC)$, adică $x = a\sqrt{2}$. □

Rezolvarea 2 (clasele a IX-a şi a X-a). Utilizăm rezultatul din lema 1. Avem

$$x^2\sqrt{3a^2 - x^2} = \left(x^2\right)^1 \left(3a^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Suntem în condiţiile lemei 4, cu $x_1 = x^2$, $x_2 = 3a^2 - x^2$, $x_1 + x_2 = 3a^2$, constant, iar $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \frac{1}{2}$. Maximul produsului (2) se realizează atunci când $\frac{x^2}{1} = \frac{3a^2 - x^2}{\frac{1}{2}}$, echivalent cu $x^2 = 6a^2 - 2x^2$, adică $x = a\sqrt{2}$. □

Rezolvarea 3 (clasa a XI-a). Fie funcţia $v : \left(0, a\sqrt{3}\right) \to \mathbb{R}_+$, cu

$$v(x) = \frac{1}{3}x^2\sqrt{3a^2 - x^2}.$$

Funcţia v este derivabilă şi derivata acesteia este

$$v'(x) = \frac{x\left(2a^2 - x^2\right)}{\sqrt{3a^2 - x^2}}.$$

Atunci $v'(x) = 0$ dacă şi numai dacă $x = a\sqrt{2}$. Tabelul următor de variaţie arată că $x = a\sqrt{2}$ este punct de maxim. □

x	0		$a\sqrt{2}$		$a\sqrt{3}$
$v'(x)$		$+ + + + + + + +$	0	$- - - - - - - - - -$	
$v(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	

Rezolvarea 4 (clasa a XII-a). Având în vedere lema 3, intuitiv, ne gândim că maximul volumului s-ar realiza pentru $x = a\sqrt{2}$. Pentru aceasta, ar fi suficient să verificăm că $v(x) \leq v\left(a\sqrt{2}\right)$, cu egalitate pentru $x = a\sqrt{2}$, unde

$$v(x) = \frac{1}{12}x^2\sqrt{3a^2 - x^2}.$$

Ultima inegalitate este echivalentă cu

$$x^2\sqrt{3a^2 - x^2} \leq 2a^3,$$

adică

$$x^4\left(3a^2 - x^2\right) \leq 4a^6,$$

ceea ce înseamnă

$$x^6 - 3a^2x^4 + 4a^6 \geq 0. \tag{3}$$

Conform teoremei lui Bézout, polinomul din membrul stâng al inegalităţii anterioare este divizibil cu $x^2 - 2a^2$. Prin împărţiri repetate cu $x^2 - 2a^2$, avem că (3) este echivalentă cu

$$\left(x^2 - 2a^2\right)^2\left(x^2 + a^2\right) \geq 0,$$

inegalitate, evident, adevărată, cu egalitate pentru $x = a\sqrt{2}$. □

Putem sugera elevilor spre rezolvare alte probleme asemănătoare. De exemplu, să afle maximul volumului unei piramide cu muchiile laterale egale cu a şi baza pătrat, triunghi dreptunghic isoscel, hexagon regulat etc. De asemenea, putem recomanda elevilor să studieze capitolul I din [3].

Bibliografie

[1] Eugen Radu, Dana Radu, *Matematică. Manual pentru clasa a VIII-a*, Editura Teora, Bucureşti, 2012.
[2] Eugen Radu, Ovidiu Şontea, *Matematică. Manual pentru clasa a XII-a*, Editura ALL, Bucureşti, 2006.
[3] Constantin Udrişte, Elena Tănăsescu, *Minime şi maxime ale funcţiilor reale de variabile reale*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.

Prof. Eugen Radu
Colegiul Naţional „Mihai Viteazul”, Bucureşti
E-mail: eradu@cnmv.ro