

O problemă de-a lui Laurențiu Panaitopol

de ALEXANDRU GICA

Vom analiza o problemă propusă de profesorul Laurențiu Panaitopol pentru ediția din anul 2003 a Olimpiadei Internaționale de Matematică. Problema a ajuns pe lista scurtă de probleme a competiției.

Începem cu următoarea.

Problema 1. Fie $b > 5$, un număr natural. Numărul

$$x_n = \overbrace{11 \dots 1}^{n-1} \underbrace{22 \dots 2}_{n} \overline{5} (b),$$

scris în baza b , este pătrat perfect pentru orice n , număr natural nenul, dacă și numai dacă $b = 10$.

Profesorul Panaitopol a folosit, drept pretext pentru problema sa, o problemă dată la Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori din anul 1998: *numărul $\overbrace{11 \dots 1}^{1997} \underbrace{22 \dots 2}_{1998} 5$ este pătrat perfect.* De fapt, este foarte ușor de

observat că numărul $\overbrace{11 \dots 1}^{n-1} \underbrace{22 \dots 2}_{n} \overline{5}$ este pătrat perfect, pentru orice număr natural nenul n . Aceasta se întâmplă deoarece

$$\overbrace{11 \dots 1}^{n-1} \underbrace{22 \dots 2}_{n} \overline{5} = \left(\frac{10^n + 5}{3} \right)^2.$$

Profesorul Panaitopol a observat că acest fenomen se întâmplă doar în baza 10. Comitetul care analizează problemele propuse pentru Olimpiada Internațională de Matematică a reținut problema domnului Panaitopol, operând o mică modificare în enunț:

Problema 2 (Lista scurtă, 2003). Fie $b > 5$, un număr natural. Numărul

$$x_n = \underbrace{11\dots1}_{n-1} \underbrace{22\dots2}_n 5 \quad (b),$$

scris în baza b , este pătrat perfect, pentru orice număr natural $n \geq n_0$, dacă și numai dacă $b = 10$.

Demonstrația inițială a domnului Panaitopol folosea argumente din zona polinoamelor. Am reușit să găsesc o altă demonstrație, cu argumente de teoria numerelor. Am inclus cele două demonstrații în [1], capitolul 17, problema 24. Vom începe prin a prezenta o variantă simplificată a celor două demonstrații ale problemei 2.

Soluția 1. Am văzut ceva mai sus că o implicație este foarte ușoară: dacă $b = 10$, atunci x_n este pătrat perfect pentru orice număr natural $n \geq n_0$. În cele ce urmează, presupunem că x_n este pătrat perfect, pentru orice număr natural $n \geq n_0$, și ne propunem să demonstrăm că $b = 10$.

Pasul 1. Arătăm că b este par. Presupunem că b ar fi impar. Dacă $b = 4k + 1$, unde $k \in \mathbb{N}$, alegem n , un număr natural, cu $n \equiv 1 \pmod{4}$ și $n \geq n_0$. Atunci

$$x_n = b^{2n-1} + b^{2n-2} + \dots + b^{n+1} + 2b^n + 2b^{n-1} + \dots + 2b + 5 \equiv 3n + 4 \equiv 3 \pmod{4}.$$

Niciun pătrat perfect nu este congruent cu 3 modulo 4; contradicție. Dacă $b = 4k + 3$, unde $k \in \mathbb{N}$, alegem n , un număr natural impar mai mare decât n_0 . Atunci

$$x_n = b^{2n-1} + b^{2n-2} + \dots + b^{n+1} + 2b^n + 2b^{n-1} + \dots + 2b + 5 \equiv -2 + 5 \equiv 3 \pmod{4}$$

și obținem din nou o contradicție.

Pasul 2. Arătăm că $b - 1$ este o putere a lui 3. De la primul pas știm că $b - 1$ este un număr impar. Dacă $b - 1$ nu ar fi o putere a lui 3, ar exista un număr prim, $p \geq 5$, care divide $b - 1$ (deci $b \equiv 1 \pmod{p}$). Alegem un întreg, a , care nu este rest pătratic modulo p și $n \geq n_0$, un număr natural care satisfacă congruența $3n + 4 \equiv a \pmod{p}$; existența lui n este asigurată de faptul că 3 este prim cu p . Avem

$$x_n = b^{2n-1} + b^{2n-2} + \dots + b^{n+1} + 2b^n + 2b^{n-1} + \dots + 2b + 5 \equiv 3n + 4 \equiv a \pmod{p}.$$

Cum a nu este rest pătratic modulo p , deducem că x_n nu este pătrat perfect. Deci $b - 1 = 3^k$, unde k este un număr natural mai mare sau egal cu 2.

Pasul 3. Arătăm că $b - 1$ este pătrat perfect. Am arătat la pasul precedent că $b - 1 = 3^k$. Pentru a arăta că $b - 1$ este pătrat perfect, trebuie să arătăm