# Cum se rezolvă?

## Despre o problemă propusă de Laurenţiu Panaitopol

de Gabriel Mincu

Discutăm o problemă de teoria numerelor, propusă în *Gazeta Matematică* de prof. univ. dr. Laurenţiu Panaitopol (1940-2008). Vom analiza mecanismele de rezolvare, punctând strategii care sunt utile la abordarea unor probleme similare.

Răsfoind o *Gazetă Matematică* mai veche, am dat peste următoarea problemă propusă de profesorul Laurenţiu Panaitopol.

**Problemă.** *Pentru fiecare număr natural $m$, notăm suma cifrelor lui $m$ cu $s(m)$, iar produsul cifrelor lui $m$ cu $p(m)$. Spunem că un număr natural $n$ are proprietatea $\mathcal{P}$ dacă există numere naturale $a$, cu $n$ cifre, toate nenule, pentru care*

$$s(a) = p(a).$$

*Arătaţi că există o infinitate de numere naturale care au proprietatea $\mathcal{P}$ şi că există o infinitate de numere naturale care nu au proprietatea $\mathcal{P}$. Se consideră că baza în care sunt reprezentate toate numerele la care se face referire în problemă este zece.*

Am realizat abia după ceva timp că începusem să mă gândesc la rezolvare. Mă întorsesem, probabil fără să-mi dau seama, pentru câteva clipe cu o altfel de durată, care scapă înţelegerii ceasornicului, în acel „bon vieux temps" în care profesorul Panaitopol ne mai propunea câte o problemă-două ca să „vadă cum reacţionăm la ele".

La prima vedere, problema pare simplă. Faptul că putem identifica uşor o infinitate de numere naturale $n$ cu proprieatea $\mathcal{P}$ – luând, de pildă, numerele $a$ de forma $\underbrace{22\ldots2}_{k}\underbrace{11\ldots1}_{2^k-k}$ – pare să confirme această opinie.

Ar fi suficientă în acest moment identificarea unei mulţimi infinite de numere $n$ care nu au proprietatea $\mathcal{P}$. După câteva momente de reflecţie, constatăm că, în contrast cu situaţia anterioară, identificarea unui „tipar" în noua situaţie se lasă aşteptată.

Acesta este probabil un moment potrivit pentru demararea unei serii de investigaţii calculatorii legate de numerele $a$ cu $n$ cifre, toate nenule, care satisfac $s(a) = p(a)$. Pare natural să introducem o notaţie care să contabilizeze numărul de apariţii ale fiecărei cifre într-un astfel de număr; vom nota aşadar cu $k_i$ numărul de apariţii ale cifrei $i$ în $a$, pentru $i = \overline{1,9}$. Atunci

$$s(a) = k_1 + 2k_2 + \cdots + 9k_9,$$

iar

$$p(a) = 2^{k_2} \cdot 3^{k_3} \cdots 9^{k_9} = 2^{k_2+2k_4+k_6+3k_8} \cdot 3^{k_3+k_6+2k_9} \cdot 5^{k_5} \cdot 7^{k_7}. \quad (1)$$

În plus, numărul de cifre al lui $a$ este

$$n = k_1 + k_2 + \cdots + k_9.$$

Este suficient pentru a finaliza rezolvarea să identificăm o infinitate de valori $n$ pentru care să nu existe sisteme de numere $k_1, k_2, \ldots, k_9$ cu proprietăţile de mai sus. Unele consideraţii de divizibilitate par plauzibile, mai ales prin prisma apariţiei acelui produs de puteri de 2, 3, 5 şi 7 de mai sus, dar relaţiile anterioare nu par a sugera vreo manieră evidentă de a exploata acest fapt. Aş comenta, în treacăt, că în acest moment al rezolvării opinia iniţială că problema e simplă a fost probabil semnificativ amendată, iar ideile de orice tip care să indice o direcţie în care se poate dezvolta soluţia vor fi binevenite.

Ideea că în relaţia

$$k_1 + 2k_2 + \cdots + 9k_9 = 2^{k_2} \cdot 3^{k_3} \cdots 9^{k_9}$$

membrul drept dă impresia că ar fi „mult mai mare" decât cel stâng pare demnă de investigaţie. Ne-am putea imagina o linie de rezolvare în care găsim numere $n$ care nu au proprietatea $\mathcal{P}$ valorificând eventualele situaţii în care membrul stâng e mai mic strict decât cel drept pentru orice valori $k_1, k_2, \ldots, k_9$. Această idee nu este însă corectă, căci pentru orice configuraţie a valorilor $k_2, k_3, \ldots, k_9$ putem alege $k_1$ aşa încât relaţia să fie verificată.

Probabil că pe undeva prin această zonă se decide dacă demersul rezolvitorului este încununat de succes sau nu. Pare că este deschisă o paletă destul de largă de opţiuni de investigaţie calculatorie, dar, în acest punct, un potenţial rezolvitor poate să şi abandoneze dacă nu găseşte vreo idee căreia să-i întrevadă o continuare eficace.

Să remarcăm că ideea de mai sus cu „membrul stâng mult mai mic decât cel drept", deşi nu furnizează o soluţie imediată pe linia propusă anterior, nu este numaidecât de lepădat. Putem să continuăm să o detaliem constatând că

$$2^{k_2+\cdots+k_9} - k_1 - 9(k_2 + \cdots + k_9) \le 2^{k_2} \cdot 3^{k_3} \cdots 9^{k_9} - k_1 - 2k_2 - \cdots - 9k_9 \text{ şi}$$

$$2^{k_2} \cdot 3^{k_3} \cdots 9^{k_9} - k_1 - 2k_2 - \cdots - 9k_9 \le 9^{k_2+\cdots+k_9} - k_1 - 2(k_2 + \cdots + k_9).$$

Nici n-am apucat bine să scriu aceste inegalităţi că l-am simţit pe „dom' Profesor" privind foaia pe care scriam şi spunând cu vocea aceea plină de încântare cu care ura parcă bun-venit câte unei mici bijuterii matematice: „Poţi s-o strângi puţin mai bine, căci acea expresie este crescătoare în fiecare din baze!"

„Are, ca de obicei, dreptate!", mi-am zis, zâmbind cu bucurie şi tristeţe către amintire. „Dacă $b < c$ sunt cifre nenule, atunci

$$b^k - kb \le c^k - kc,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Ba şi mai general, dacă $L \ge 1$ şi $M \in \mathbb{R}$, avem chiar

$$Lb^k - kb - M \le Lc^k - kc - M.$$

Aplicând în mod repetat această inegalitate expresiei $2^{k_2} \cdot 3^{k_3} \cdots 9^{k_9} - k_1 - 2k_2 - \cdots - 9k_9$, obţinem relaţiile

$$2^{n-k_1} - k_1 - 2(n-k_1) \le 2^{k_2} \cdot 3^{k_3} \cdots 9^{k_9} - k_1 - 2k_2 - \ldots - 9k_9 \le 9^{n-k_1} - k_1 - 9(n-k_1)\text{";}$$

dacă $s(a) = p(a)$, atunci „la mijloc" e zero, deci obţinem

$$2^{n-k_1} - (n - k_1) \le n \le 9^{n-k_1} - 8(n - k_1). \qquad (2)$$

Notând $k = n - k_1$, obţinem faptul că numerele $n$ – pentru care există numere $a$, cu $n$ cifre, toate nenule, din care exact $k$ mai mari decât 1, şi pentru care $s(a) = p(a)$ – se află în intervalul $[2^k - k, 9^k - 8k]$. Constatând că, pentru un număr $a$, relaţia $s(a) = p(a)$ nu este afectată de modificarea ordinii cifrelor lui $a$, pentru fiecare $n$, cu proprietatea $\mathcal{P}$, vom scrie numerele $a$ relevante în ordinea crescătoare a cifrelor. Numerele $a$ cu $k$ cifre mai mari decât 1, cu toate cifrele nenule şi scrise în ordine crescătoare şi cu calitatea că $s(a) = p(a)$ pot fi puse prin urmare în corespondenţă bijectivă cu $k$-uplurile ordonate alcătuite din cifre diferite de 0 şi 1 şi scrise în ordine crescătoare. Prin urmare, se obţine o funcţie surjectivă de la mulţimea acestor $k$-upluri la cea a numerelor $n$ care au proprietatea $\mathcal{P}_k$: „Există numere naturale $a$ cu $n$ cifre, toate nenule, exact $k$ dintre ele mai mari decât 1, şi pentru care $s(a) = p(a)$". Această idee ar rezolva problema dacă singurele numere $n$ cu proprietatea $\mathcal{P}$ din intervalul $[2^k - k, 9^k - 8k]$ ar fi cele care au de fapt chiar proprietatea $\mathcal{P}_k$. Nu este însă cazul. Analizând inegalităţile (2), constatăm că în acest interval nu se pot găsi numere $n$ cu proprietatea $\mathcal{P}_j$ cu $j \leq \frac{k}{4}$ sau cu $j \geq 4k$. Acest fapt ne sugerează considerarea intervalelor

$$J_k = \left[2^{4^k} - 4^k, 9^{4^k} - 8 \cdot 4^k\right] \quad \text{şi} \quad I_k = \left[2^{4^k} - 4^k, 2^{4^{k+1}} - 4^{k+1}\right)$$

pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*$. Evident, $J_k \subset I_k$ pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*$, iar numerele $n$ cu proprietatea $\mathcal{P}$ din $J_k$ vor avea proprietatea $\mathcal{P}_j$ pentru anumite valori $j \in (4^{k-1}, 4^{k+1})$.

Dar pentru $j \in (4^{k-1}, 4^{k+1})$ numărul $j$-uplurilor ordonate de cifre diferite de 0 şi 1 şi scrise în ordine crescătoare este $C_{j+7}^{j} = C_{j+7}^{7}$. Prin urmare, intervalul $J_k$ poate conţine cel mult

$$\sum_{j=4^{k-1}+1}^{4^{k+1}-1} C_{j+7}^{7} = \sum_{j=1}^{4^{k+1}-1} C_{j+7}^{7} - \sum_{j=1}^{4^{k-1}} C_{j+7}^{7} = C_{4^{k+1}+7}^{8} - C_{4^{k-1}+8}^{8} < C_{4^{k+1}+7}^{8}$$

numere $n$ cu proprietatea $\mathcal{P}$.

Pe de altă parte, intervalul $J_k$ conţine

$$9^{4^k} - 2^{4^k} - 7 \cdot 4^k + 1 = 7\left(9^{4^k-1} + 9^{4^k-2} \cdot 2 + \cdots + 2^{4^k-1}\right) - 7 \cdot 4^k + 1 > 7 \cdot 9^{4^k-1}$$

numere naturale. Cun însă

$$\lim_{k\to\infty} \frac{7 \cdot 9^{4^k-1}}{C_{4^{k+1}+7}^{8}} = \lim_{k\to\infty} \frac{7 \cdot 9^{4^k-1} \cdot 8!}{4^{k+1}(4^{k+1}+1)\cdots(4^{k+1}+7)} \geq \lim_{k\to\infty} \frac{7 \cdot 9^{4^k-1} \cdot 8!}{4^{8k+15}} = +\infty,$$

obţinem prezenţa de numere $n$ cu proprietatea $\mathcal{P}$ în fiecare interval $J_k$ (deci şi în $I_k$) de la un prag $K$ în sus, ceea ce încheie rezolvarea. $\square$

Desigur, această soluţie a utilizat elemente de combinatorică pentru a concretiza ideea iniţială a ecartului mare dintre valorile expresiilor $k_1 + 2k_2 + \cdots + 9k_9$ şi $2^{k_2} \cdot 3^{k_3} \cdots 9^{k_9}$. Nu cred că rezolvarea gândită iniţial de profesorul Panaitopol a mers pe o astfel de direcţie; argumentele dumnealui au fost, mai probabil, din zona divizibilităţii, pe care noi am abandonat-o la un moment dat pentru a urma o inspiraţie de alt tip, care, de altfel, chiar a produs o soluţie a problemei. Încercăm acum să descoperim o soluţie bazată pe chestiuni de divizibilitate şi revenim în acest scop la relaţia (1), care pune în evidenţă numerele prime 2, 3, 5 şi 7. Ne-am putea gândi, din acest motiv, să încercăm numere $n$ care fie să conţină doar aceşti factori, fie, la cealaltă extremă, să nu conţină niciunul dintre ei. Încercăm mai întâi prima variantă, care pare mai promiţătoare fie şi numai prin prisma faptului că factorii primi cu care avem de-a face sunt concreţi. Dacă vom considera, prin urmare, un număr natural $n$ – de forma $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^\alpha$, cu proprietatea $\mathcal{P}$ – şi numărul natural $a$, cu $k_i$ cifre de $i$, $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, pentru care $s(a) = p(a)$, relaţiile scrise la începutul comentariului de faţă arată că

$$\begin{aligned}
2^{k_2+2k_4+k_6+3k_8} \cdot 3^{k_3+k_6+2k_9} \cdot 5^{k_5} \cdot 7^{k_7} &= 2^{k_2} \cdot 3^{k_3} \cdots 9^{k_9} = p(a) = s(a) \\
&= k_1 + 2k_2 + \cdots + 9k_9 \\
&= n + k_2 + 2k_3 + \cdots + 8k_9 \geq \\
&\geq n = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^\alpha.
\end{aligned}$$

De aici reiese că măcar unul dintre exponenţii produsului de la început este mai mare decât $\alpha$ sau egal cu acesta. Dacă $p \in \{2,3,5,7\}$ este baza acestuia, obţinem, ţinând cont că $p^\alpha | n$ şi că $p^\alpha | 2^{k_2} \cdot 3^{k_3} \cdots 9^{k_9}$, faptul că $p^\alpha | k_2 + 2k_3 + \cdots + 8k_9 \neq 0$. De aici rezultă că avem

$$k_2 + 2k_3 + \cdots + 8k_9 \geq p^\alpha \geq 2^\alpha.$$

Remarcând şi inegalitatea

$$k_2 + 2k_3 + \cdots + 8k_9 \leq 5(k_2 + k_3 + 2k_4 + 2k_5 + k_6 + 2k_7 + 3k_8 + 2k_9),$$

obţinem

$$\begin{aligned} 2^{\frac{2^\alpha}{5}} &\leq 2^{\frac{k_2+2k_3+\cdots+8k_9}{5}} \leq 2^{k_2+k_3+2k_4+2k_5+k_6+2k_7+3k_8+2k_9} \\ &\leq 2^{k_2+2k_4+k_6+3k_8} \cdot 3^{k_3+k_6+2k_9} \cdot 5^{k_5} \cdot 7^{k_7} = p(a) = s(a) \leq 9n = 9 \cdot 210^\alpha, \end{aligned}$$

de unde deducem, ţinând cont că $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \frac{210^\alpha}{2^{\frac{2^\alpha}{5}}} = 0$, că nu pot exista decât un număr finit de valori $\alpha$ pentru care $n = 210^\alpha$ are proprietatea $\mathcal{P}$. Prin urmare, există o infinitate de puteri ale lui 210 care nu au proprietatea $\mathcal{P}$, ceea ce încheie demonstraţia. □

Desigur, a posteriori a doua soluţie este mai puţin laborioasă decât prima. Ea este, în esenţă, rezolvarea propusă de profesorul Panaitopol [1], un campion al soluţiilor elegante. Pe de altă parte, dânsul ar fi apreciat cu certitudine şi soluţia combinatorică a problemei, conştient fiind că inspiraţia vine sub felurite forme şi că, în lipsa unor idei alternative pentru care să fie clar că duc la soluţie, e indicat să o concretizăm aşa cum apare ea, căci o soluţie completă a problemei este întotdeauna preferabilă bănuielii că o altă abordare, dar nu e foarte clar care, ar putea conduce la o soluţie mai succintă, mai elegantă sau mai spectaculoasă. Găsirea ulterioară a unor soluţii alternative, fie ele vrednice de epitetele de mai sus, fie nu, vine să ne întregească demersul intelectual şi să îmbogăţească paleta cromatică a tabloului matematic zugrăvit prin intermediul problemei respective.

## BIBLIOGRAFIE

[1] Laurenţiu Panaitopol, Alexandru Gica, *Aritmetică şi teoria numerelor. Probleme*, Editura Universităţii din Bucureşti, 2006.

LECTOR UNIV. DR. GABRIEL MINCU
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ, UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI
E-mail: gamin@fmi.unibuc.ro