Matematica în acţiune

Matematica, de la joc la realitate

de CRISTIAN MOANŢĂ

Prezentăm probleme cu jocuri (logice) care se rezolvă elegant cu ajutorul unor raţionamente matematice. Unele au fost propuse la diverse concursuri de matematică şi în *Gazeta Matematică*. Toate deschid apetitul pentru matematica de cercetare.

De mii de ani, minţi luminate s-au chinuit să ajungă la o singură ştiinţă deasupra tuturor celorlalte care să conţină cunoştinţele necesare pentru a explica lumea în care trăiesc. Noi credem că această ştiinţă este Matematica. Matematicienii sunt cei ce caută reguli şi algoritmi în spatele unui haos aparent şi al unei complexităţi infinite.

De-a lungul timpului, oamenii s-au străduit să descopere regulile şi modelele lumii materiale, să determine calităţile obiectelor, relaţiile complexe dintre ei şi ceea ce îi înconjoară.

Sinergia matematică–joc a devenit o banalitate, relaţia dintre cele două domenii de manifestare a inteligenţei umane fiind bine exemplificată în ambele sensuri. Deşi ceva mai greu de ilustrat, nici trecerea de la joc la matematică sau invers nu este lipsită de acoperire.

Jocul ... S-au realizat jocuri în mii şi mii de forme, pentru vârste precizate sau pentru toate categoriile de vârstă ... A vorbi despre importanţa educativ–formativă a jocurilor, despre rolul lor în conturarea şi antrenarea memoriei, puterii de analiză, de concentrare, a perspicacităţii şi supleţei în gândire, capacităţii de a evalua situaţii complexe, de a anticipa, poate părea de prisos.

Nu trebuie, deci, să ne mire interesul pentru jocuri al matematicienilor şi nici interesul pentru matematică al celor atraşi de jocurile logice. Nici nu se poate altfel, multe jocuri înglobând o cantitate semnificativă de gândire matematică, iar matematica însăşi fiind, într-o anumită măsură şi într-o anumită accepţiune, un mare „joc împotriva naturii”, împotriva gramaticii necunoscute a acesteia.

Problema 1. Iulia şi Ştefan şi-au împărţit cele 52 de cărţi de joc astfel încât fiecăruia i-au revenit câte 26 de cărţi. Cărţile de la 2 la 10 valorează de la 2 la 10 puncte, asul valorează 11 puncte, valetul 12 puncte, dama 13 puncte, iar regele 14 puncte. Ştefan a observat că nu are în teanc niciun as şi niciun 2, dar nu deţine patru cărţi de aceeaşi valoare, iar Iulia a observat că nu are mai mult de două cărţi cu aceeaşi valoare printre cărţile cu peste 11 puncte. Iulia face suma valorilor cărţilor din teancul său. Care este cea mai mică valoare pe care o poate avea această sumă? Dar cea mai mare?

Cristian Moanţă, Olimpiada de Matematică, Etapa locală, Dolj, 2018

Soluţie. Iulia trebuie să aibă în teanc cei patru de 2, cei patru aşi şi cel puţin o carte de fiecare fel.

Asta înseamnă

$$4 + 4 + 11 = 19$$

ştiute de Iulia. Celelalte şapte cărţi le alegem astfel încât valoarea lor să fie minimă: încă trei de 3, trei de 4 şi un 5. Obţinem suma

$$4 \cdot (2 + 11 + 3 + 4) + 2 \cdot 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 12 + 13 + 14 = 169.$$

Ştefan ar avea, în acest caz, doi de 5 şi câte trei cărţi de 6, 7, 8, 9, 10, valet, damă, rege, ceea ce respectă condiţiile problemei.

Pentru ca suma cărţilor deţinute de Iulia să fie maximă, cele şapte cărţi ale Iuliei pe care nu le ştim trebuie să aibă valori cât mai mari. Dar Iulia are cel mult doi valeţi, două dame şi doi regi (câte o carte ştim deja că are), deci, pentru a obţine valoarea maximă, îi vom mai da Iuliei câte una dintre aceste cărţi. Cum Iulia deţine deja toţi aşii, îi vom da şi toţi decarii (adică încă trei pe lângă cea pe care ştim deja că o are) şi doi nouari (adică încă o carte pe lângă cea pe care ştim deja că o are). Dacă îi vom da toţi nouarii, atunci Iulia va avea 28 de cărţi, fals, deoarece fiecăruia i-au revenit câte 26 de cărţi. Astfel, Iulia va avea: câte patru de 2, de 10 şi de as, câte doi de 9, valeţi, dame şi regi şi câte un 3, 4, 5, 6, 7 şi 8, iar Ştefan va avea câte trei de 3, 4, 5, 6, 7 şi 8 şi câte doi de 9, valeţi, dame şi regi, ceea ce respectă condiţiile problemei.

Cea mai mare valoare pe care o poate avea suma valorilor cărţilor Iuliei este aşadar:

$$4 \cdot (2 + 10 + 11) + 2 \cdot (9 + 12 + 13 + 14) + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 221.$$

Problema 2. Simona şi Ilie joacă „tenismon": ei aruncă o monedă şi, dacă rezultatul aruncării este *cap*, atunci Simona primeşte un punct, iar, dacă este *pajură*, atunci Ilie primeşte un punct. Câştigă jocul acel jucător care are cel puţin 4 puncte, cu cel puţin 2 puncte diferenţă. Jocul este câştigat de Simona cu scorul de 10–8. Câte secvenţe diferite de aruncări conduc la acest rezultat?

Cristian Moanţă

Soluţie. Deoarece jocul nu s-a încheiat, trebuie ca cel care a ajuns primul la 4 să fi condus cu 4–3, deci ca scorul să fi fost înainte de cea de-a şaptea aruncare 3–3. Similar, după 3–3 şi 4–3 pentru cineva, trebuie să se fi ajuns la 4–4 (altminteri jocul s-ar fi încheiat cu 5–3). De la 4–4 evoluţia scorului trebuie să fi fost următoarea: unul dintre jucători (oricare dintre cei doi) a preluat conducerea, celălalt a egalat. Acest lucru s-a repetat până la 5–5 când Simona a punctat de două ori la rând. Până la 3–3 se ajunge în $C_6^2 = 15$ moduri. De la 3–3 la 4–4 în două moduri: I-S sau S-I, de la 4–4 la 5–5 tot în două moduri etc, de la 7–7 la 8–8 în două moduri, I-S sau S-I, iar de la 8–8 la 10–8 într-un singur mod, S-S.

Avem, aşadar,

$$15 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 15 \cdot 2^5 = 480$$

de moduri de a ajunge la scorul 10–8 pentru Simona.

Problema 3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de latură 1. O furnică parcurge un drum pe feţele cubului, pornind din A şi terminând în C'. Deplasarea se realizează doar pe muchiile cubului sau pe diagonalele feţelor sale. Ştiind că drumul nu trece prin niciun punct de două ori, determinaţi lungimea maximă a unui asemenea drum.

Olimpiada de Matematică, Etapa judeţeană, 2017

Soluţie. Se va demonstra că lungimea maximă este $3 + 4\sqrt{2}$. Un exemplu de traseu ar fi

$$A \mapsto A' \mapsto B \mapsto D \mapsto D' \mapsto C \mapsto B' \mapsto C',$$

cu lungimea $3 + 4\sqrt{2}$.

Deoarece sunt 8 vârfuri, furnica poate face cel mult 7 paşi, de lungime fie 1, fie $\sqrt{2}$. Un drum format din cel mult 6 paşi are lungimea maximă $6\sqrt{2}$, care este mai mică decât $3 + 4\sqrt{2}$. Deci furnica trebuie să facă 7 paşi.

Vom demonstra că numărul maxim de paşi diagonali este 4. Pentru aceasta, colorăm vârfurile A, C, B', D' cu negru, iar celelalte cu alb. Observăm că un pas diagonal păstrează culoarea, dar un pas pe muchii schimbă culoarea. Cum punctele A şi C' au culori diferite, deducem că furnica trebuie să parcurgă un număr impar de paşi pe muchii, deci nu putem avea un drum cu 2 paşi pe muchii şi 5 paşi diagonali. Un eventual traseu cu 6 paşi diagonali ar conţine câte un pas pe fiecare faţă. Având doar 4 puncte de aceeaşi culoare, putem avea cel mult 3 paşi diagonali consecutivi. Primii 3 paşi ar porni din A şi ar trece prin toate punctele negre. Ultimii paşi ar trece prin toate punctele albe şi ar încheia traseul în C'. Analizând pe cazuri, vom observa că drumul se va autointersecta.

Comentariu. Pentru o analiză detaliată a acestei probleme, recomandăm [2].

În zilele noastre, internetul nu mai este doar simbolul tehnologiei de vârf, el reprezintă un instrument de maximă necesitate. Ca utilizator al reţelei internet, ai la îndemână un instrument ce oferă acces la cantităţi vaste de informaţii din întreaga lume, poţi beneficia de produsele şi serviciile companiilor printr-o simplă comandă prin Internet şi comunici simplu, rapid şi eficient cu alţi utilizatori de pe întregul glob.

În domeniul siguranţei calculatoarelor, autentificarea este procesul de verificare a identităţii (digitale) a unui participant la comunicaţie, de obicei prin indicarea unui cod de utilizator mai mult sau mai puţin public (în engleză, user-ID) şi a unei parole secrete (password).

Problema 4. Ştefan, pentru adresa de e-mail, îşi construieşte parola, schimbând între ele, două câte două, literele prenumelui (STEFAN), obţinând combinaţia FANEST. Să se determine numărul de schimbări efectuate.

Cristian Moanţă, Suplimentul *Gazetei Matematice*, Nr. 10, 2018

Soluţie. Numărul de schimbări efectuate este dat de permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} S & T & E & F & A & N \\ F & A & N & E & S & T \end{pmatrix}$$

a mulţimii de litere $M = \{S, T, E, F, A, N\}$. Schimbările efectuate sunt transpoziţii ale mulţimii M. Vom schimba literele mulţimii M, în mod bijectiv, cu cifrele 1, 2, ..., 6, astfel încât σ se scrie sub forma

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

În acest mod vom calcula numărul de inversiuni: $m(\sigma) = 4 + 4 + 3 + 0 + 0 + 0 = 11$. Conchidem că Ştefan a făcut 11 schimbări.

În viaţa noastră, majoritatea evenimentelor ce se petrec pe termen scurt şi pe termen lung sunt aleatorii. Aşa a apărut şi necesitatea de a studia o ştiinţă a hazardului. Astfel că nu ar strica să aplicăm puţină matematică din când în când. În acest mod ne-am putea creşte şansele de a cunoaşte dinainte rezultatul final.

Problema 5. (Problema lui Banach) Un fumător cumpără două cutii de chibrituri. Apoi, de fiecare dată când are nevoie, scoate la întâmplare una sau alta dintre cutii.

a) Care este probabilitatea ca, în momentul în care constată că una dintre cutii este goală, cealaltă cutie să mai conţină k beţe, dacă iniţial fiecare cutie a conţinut câte n beţe?

b) Utilizând rezultatul obţinut, să se arate că

$$C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^n + 2^2 C_{2n-2}^n + ... + 2^n C_n^n = 2^{2n}.$$

Soluţie. Numim cele două cutii: (i) şi (ii). Pentru a ajunge în situaţia dată, persoana a scos de $2n - k + 1$ ori o cutie din buzunar. De n ori o cutie pentru a o goli, de $n - k$ ori cealaltă cutie pentru a-i rămâne k beţe, şi, din nou, prima cutie pentru a constata că este goală.

Deci au loc evenimentele:

A: „în $2n - k$ cazuri apare de n ori cutia (i)";

B: „în $2n - k$ cazuri apare de n ori cutia (ii)".

Cele două evenimente au evident probabilităţi egale. Să considerăm evenimentul A. Probabilitatea ca „în $2n - k$ extrageri să apară de n ori cutia (i) şi de $n - k$ ori cutia (ii)" este (schema binomială, Bernoulli): $C_{2n-k}^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$.

Probabilitatea ca în a $2n - k + 1$-a extragere să apară (i) este $\frac{1}{2}$. Astfel, $P(A) = \frac{1}{2} C_{2n-k}^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$, iar probabilitatea cerută este $p_k = C_{2n-k}^n \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) Se ţine cont de $\sum\limits_{k=0}^{n} P_k = E$ şi deci $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = 1$, iar concluzia este imediată.

Problema 6. Un punct mobil se deplasează aleatoriu pe o axă gradată. Ştiind că punctul se află în momentul iniţial în origine şi că în fiecare unitate de timp se deplasează fie spre „dreapta" cu a unităţi, cu probabilitatea p ($p \in (0, 1)$), fie spre „stânga" cu b unităţi, cu probabilitatea $q = 1 - p$, să se determine probabilitatea ca după n unităţi de timp, punctul să se afle din nou în origine.

Eugen Păltănea, Concursul Naţional ,,Laurenţiu Duican", 2009

Soluţie. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Notăm cu p_n probabilitatea cerută. Presupunem că, pentru a ajunge din nou în origine, punctul a parcurs un „drum aleatoriu" cu k deplasări spre dreapta şi $n-k$ spre stânga ($1 \leq k \leq n-1$). Deducem $ka = (n-k)b$ (1). Fie $d = (a,b) \in \mathbb{N}^*$. Rezultă $a = du$ şi $b = dv$, cu $(u,v) = 1$. Din (1) deducem $ku = (n-k)v$, de unde $k(u+v) = nv$. Cum $(v, u+v) = 1$, atunci $v \mid k$. Fie $k = vm$, $m \in \mathbb{N}^*$. Obţinem $n = m(u+v)$ şi $n-k = um$. Probabilitatea unui astfel de drum va fi egală cu $p^{vm} \cdot q^{um}$. Atunci $p_n = 0$, dacă $u+v$ nu divide pe n. În final,

$$p_{(u+v)m} = C_{(u+v)m}^{vm} p^{vm} q^{um}$$

din Schema lui Bernoulli, dacă $n = (u+v)m$.

Comentariu. Pentru o mai bună înţelegere a teoriei probabilităţilor, recomandăm articolul [5], scris de autorul problemei precedente.

Propunem spre rezolvare următoarele probleme.

Problema 7. În cantonamentul de pregătire a preliminariilor Campionatului Mondial de Fotbal 2018 din Rusia echipa de fotbal a României participă cu 25 de fotbalişti: 3 portari şi 22 de jucători de câmp: fundaşi, mijlocaşi şi atacanţi. Determinaţi câţi fotbalişti pot juca pe toate posturile (fundaşi, mijlocaşi şi atacanţi), dacă se ştie că 5 fotbalişti nu pot fi nici fundaşi, nici mijlocaşi, 6 fotbalişti nu pot fi nici mijlocaşi, nici atacanţi, 4 fotbalişti nu pot fi nici fundaşi, nici atacanţi şi câte 3 fotbalişti pot fi distribuiţi să joace pe cel puţin două dintre cele trei posturi.

Cristian Moanţă, *Gazeta Matematică*, Nr. 4, 2017

Problema 8. Oamenii unui trib străvechi foloseau o limbă în care cuvintele erau formate doar cu literele A şi B. Cercetătorii au descoperit că, pentru oricare două cuvinte de lungimi egale, există cel puţin trei poziţii corespondente în care literele sunt diferite. De exemplu, cuvintele $ABBAA$ şi $AAAAB$ diferă în poziţiile 2, 3 şi 5, adică în trei poziţii. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Demonstraţi că în această limbă nu pot exista mai mult de $\left[\frac{2^n}{n+1}\right]$ cuvinte de lungime n ($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a).

Cătălin Gherghe, Olimpiada de Matematică, Etapa naţională, 2016

Problema 9. a) Demonstraţi că suprafaţa unui pătrat de latură 2 nu se poate acoperi cu trei discuri de rază 1.

b) Demonstraţi că, folosind trei discuri de rază 1, se poate acoperi mai mult de $99,75\%$ din suprafaţa unui pătrat de latură 2.

Olimpiada de Matematică, Etapa naţională, 2014

Problema 10. Un pătrat se îndoaie astfel încât punctul D ajunge pe latura AB într-un punct M. Arătaţi că suprafaţa îndoită este mai mare decât un sfert din suprafaţa pătratului, oriunde ar fi M pe AB.

Dorina Zaharia,
Lista scurtă, Olimpiada de Matematică, Etapa naţională, 2007

Problema 11. Se dă un paralelogram de arie S. Folosind numai o riglă negradată, să se construiască un paralelogram de arie $\frac{S}{6}$.

Aurel Bârsan,
Lista scurtă, Olimpiada de Matematică, Etapa naţională, 2008

Problema 12. La un concurs de matematică, la care participă 50 de elevi, se oferă spre rezolvare 3 probleme. Ştiind că fiecare elev a rezolvat cel puţin o problemă şi că numărul de soluţii corecte ale tuturor concurenţilor este 100, arătaţi că numărul celor care au rezolvat corect toate cele trei probleme este cel mult 25.

Radu Gologan,
Lista scurtă, Olimpiada de Matematică, Etapa naţională, 2015

Problema 13. Ştefan îl întreabă pe colegul său:

– Vrei să-ţi ghicesc ziua şi luna naşterii?

– Da.

– Atunci te rog să faci următoarele calcule: adună 2 la ziua naşterii şi înmulţeşte rezultatul cu 2. Adaugă 5 la rezultat şi apoi înmulţeşte cu 5. La rezultatul obţinut adaugă luna naşterii. Cât ţi-a dat?

– 335.

– Eşti născut în prima jumătate (primele şase luni) sau în a doua jumătate (ultimele şase luni) a anului?

– În a doua jumătate.

– Te-ai născut pe 28 octombrie.

Cum a raţionat Ştefan?

Cristian Moanţă, Olimpiada de Matematică, Etapa locală, Dolj, 2017

Bibliografie

[1] Horea Banea (trad.), *Probleme de matematică traduse din revista sovietică Kvant*, Vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

[2] Artur Bălăucă, *Asupra unor aspecte privind Olimpiada Judeţeană de Matematică*, Didactica Matematică, Nr. 1, 2018, pp. 25-27.

[3] Radu Gologan, Mariean Andronache, Dan Schwarz, Dinu Şerbănescu, *Olimpiada de matematică 2006-2010. Etapele judeţeană şi naţională*, Biblioteca Societăţii de Ştiinţe Matematice, Editura Sigma, Bucureşti, 2006.

[4] Cristian Moanţă, *Probleme de analiză matematică pentru bacalaureat şi admitere în învăţământul superior*, Editura Rapsodia Română, Craiova, 1998.

[5] Eugen Păltănea, *Prezenţa elementelor de teoria probabilităţilor în programa de liceu*, Didactica Matematică, Nr. 2, 2015, pp. 1-8.

[6] *Concursul Naţional de Matematică ,,Laurenţiu Duican"*, Editura Paralela 45, Piteşti, 2016.

[7] Colecţia *Gazeta Matematică*, Seria B.

Prof. Cristian Moanţă
Colegiul Naţional ,,Fraţii Buzeşti", Craiova
E-mail: moanta.cristi@yahoo.com