DIDACTICA MATEMATICĂ

SUPLIMENT AL GAZETEI MATEMATICE

ANUL al IX-lea **Nr. 1/2019**

Modele de lecţii

Proprietatea lui Darboux

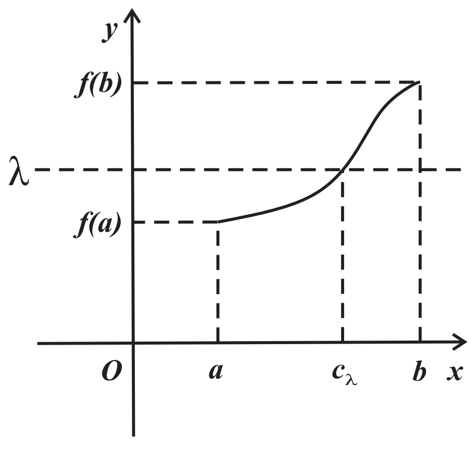
de Alexandru Gabriel Mîrşanu

Prezentăm rezultate despre funcţii care au proprietatea lui Darboux. De asemenea, includem exemple de probleme de concurs sau din *Gazeta Matematică* în care intervine proprietatea anterior menţionată.

Începem prin a defini noţiunea principală a acestui articol.

Definiţia 1. *Fie $I \subset \mathbb{R}$, un interval. Spunem că o funcţie, $f : I \to \mathbb{R}$, are* proprietatea lui Darboux *pe I (sau că f este o* funcţie Darboux *pe I), dacă, pentru orice $a, b \in I$, cu $a < b$, şi orice λ, situat între $f(a)$ şi $f(b)$, cu $f(a) \neq f(b)$, există cel puţin un punct $c_\lambda \in (a, b)$ astfel încât $f(c_\lambda) = \lambda$.*

Interpretare geometrică. Ecuaţia $f(x) = \lambda$ admite cel puţin o soluţie pe (a, b).



Următorul rezultat oferă o consecinţă, cu o ipoteză suplimentară adecvată, a faptului că o funcţie are proprietatea lui Darboux pe un interval închis.

Lema lui Bolzano. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, o funcţie. Dacă f este o funcţie Darboux pe $[a, b]$ şi $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = 0$.*

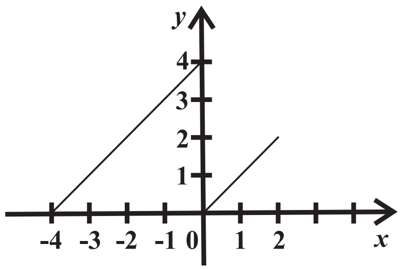
Demonstraţie. Se alege $\lambda = 0$ în definiţia anterioară.

În următoarea definiţie introducem o noţiune similară celei prezentate anterior, cu excepţia faptului că c_λ nu mai este obligatoriu situat în intervalul (a, b).

Definiţia 2. *Spunem că o funcţie, f, are* proprietatea valorilor intermediare *pe I, dacă, pentru orice $a, b \in I$, cu $a < b$, şi orice λ, situat între $f(a)$ şi $f(b)$, există cel puţin un punct $c_\lambda \in I$ astfel încât $f(c_\lambda) = \lambda$.*

Exemplu. Considerăm funcţia $f : [-4, 2] \to [0, 4]$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \in [-4, 0], \\ x, & x \in (0, 2]. \end{cases}$$



Avem $a = -1$, $b = 1$ şi intervalul $(-1, 1)$; $f(a) = 3$, $f(b) = 1$ şi intervalul $(1, 3)$. Alegem $\lambda = 2,5$. Atunci există $c_\lambda \in [-4, 2]$, dar nu din $(-1, 1)$, astfel încât $f(-1,5) = 2,5$. În acest caz, funcţia are proprietatea valorilor intermediare, dar nu are proprietatea lui Darboux.

Următoarea teoremă oferă o caracterizare a funcţiilor Darboux.

Teorema 3. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, o funcţie. Funcţia f este Darboux pe I dacă şi numai dacă funcţia f duce orice interval $J \subset I$ tot într-un interval.*

Observaţie. Acest rezultat se poate lua ca definiţie echivalentă.

Consecinţă. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, o funcţie Darboux pe I. Atunci $f(I)$ este un interval.*

Observaţie. În exemplul anterior, $f([-4, 2]) = [0, 4]$, care este interval, dar f nu este funcţie Darboux pe $[-4, 2]$.

Continuăm cu următoarea definiţie.

Definiţia 4. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, o funcţie. Spunem că funcţia f are* proprietatea lui Darboux în sens slab *dacă, pentru orice $a, b \in I$, cu $a < b$, şi orice λ, situat între $f(a)$ şi $f(b)$, şi orice $\varepsilon > 0$, există $c_{\lambda,\varepsilon} \in (a, b)$ astfel încât $|\lambda - f(c_{\lambda,\varepsilon})| < \varepsilon$ sau, echivalent, există un şir $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a, b)$ astfel încât $f(c_n) \to \lambda$.*

Următorul rezultat oferă o condiţie suficientă ca o funcţie să aibă proprietatea lui Darboux.

Teorema Cauchy-Bolzano. *Orice funcţie continuă, $f : I \to \mathbb{R}$, are proprietatea lui Darboux pe I.*