Cum se rezolvă?

Demonstraţii ale unor teoreme celebre cu ajutorul ariilor

de Mihaela Berindeanu

Prezentăm o metodă de rezolvare a problemelor de geometrie utilizând calculul unor arii. Problemele au fost discutate cu elevii de gimnaziu la Centrul de Excelenţă de Matematică din Municipiul Bucureşti.

Înfiinţat în anul şcolar 2012-2013, Centrul de Excelenţă în Matematică - Bucureşti (CEx) oferă celor mai buni elevi din Capitală posibilitatea de a se pregăti intensiv la matematică.

Fiind o pepinieră pentru viitorii cercetători din domeniul ştiinţelor exacte, CEx selectează din toate şcolile bucureştene elevii cei mai ageri, mai curioşi şi mai dornici de a înţelege tainele matematicii.

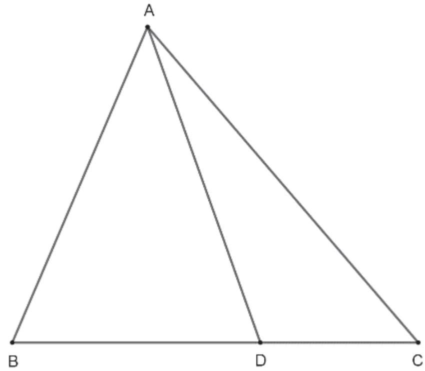
În anul şcolar 2017-2018 am fost profesor formator la CEx pentru grupa de elevi de clasa a VI-a. Am fost nevoită să îndeplinesc dorinţa imperativă a elevilor de a învăţa pe repede înainte teoremele esenţiale ale geometriei plane (un domeniu nou şi incitant pentru ei), bazându-mă doar pe cunoştinţele asimilate deja de elevi, aşa că am recurs la demonstraţii folosind cunoştinţe simple de geometrie (calculul ariei) şi proprietăţile proporţiilor.

Cu noţiuni simple, dar ingenios coroborate, se pot demonstra teoreme clasice de geometrie, cu un grad ridicat de dificultate, fără a apela la cunoştinţele care, conform programei de studiu, se predau în clasele superioare (asemănarea triunghiurilor, teorema lui Thales etc).

Demonstraţiile pe care le vom prezenta pornesc de la următorul rezultat, a cărui justificare este imediată. Mai departe, prin $\mathcal{A}(MNP)$ vom înţelege aria triunghiului MNP.

Teorema 1. *Într-un triunghi ABC, cu $D \in BC$, există relaţia:*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\mathcal{A}(ABD)}{\mathcal{A}(ADC)}.$$



Vom demonstra cu ajutorul ariilor, pentru început, următorul rezultat.

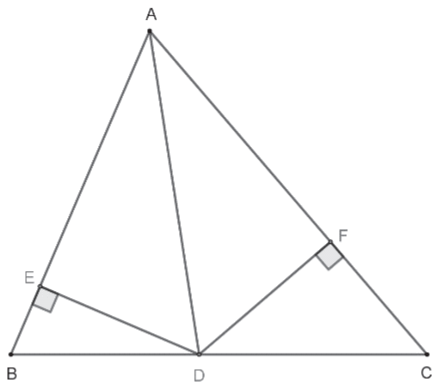
Teorema 2 (Teorema bisectoarei). *Fie ABC, un triunghi, şi punctul $D \in BC$ astfel încât $m(\widehat{BAD}) \equiv m(\widehat{CAD})$. Atunci*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Demonstraţie. Construim perpendiculare din punctul D pe dreptele AB şi AC: $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, unde $E \in AB$ şi $F \in AC$. Cum AD este bisectoare, rezultă că

$$[DE] \equiv [DF].$$

Calculăm raportul ariilor triunghiurilor ABD şi ADC în două moduri.



Folosind Teorema 1, avem că

$$\frac{\mathcal{A}(ABD)}{\mathcal{A}(ADC)} = \frac{BD}{DC}.$$

Pe de altă parte, ţinând cont că $[DE]$ şi $[DF]$ sunt înălţimi în triunghiurile ABD, respectiv ADC, avem:

$$\frac{\mathcal{A}(ABD)}{\mathcal{A}(ADC)} = \frac{AB \cdot DE}{AC \cdot DF},$$

raport pe care îl simplificăm, ţinând cont de egalitatea $DE = DF$, şi obţinem

$$\frac{\mathcal{A}(ABD)}{\mathcal{A}(ADC)} = \frac{AB}{AC}.$$

Din cele stabilite mai sus, rezultă că $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, deci bisectoarea unghiului A determină pe latura opusă, (BC), segmente proporţionale cu laturile triunghiului. □

Continuăm expunerea cu rezultatul următor.

Teorema 3 (Teorema lui Van Aubel). *Fie ABC, un triunghi, şi punctele $D \in (BC)$, $E \in (AB)$, $F \in (AC)$, cu proprietatea $AD \cap BF \cap CE = \{O\}$. Atunci*

$$\frac{AO}{OD} = \frac{AE}{EB} + \frac{AF}{FC}.$$

Demonstraţie. Justificarea este o aplicaţie geometrică a proporţiilor derivate. Conform Teoremei 1,

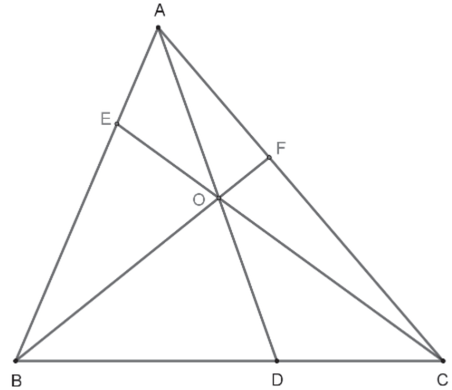
$$\frac{AE}{EB} = \frac{\mathcal{A}(AEO)}{\mathcal{A}(BEO)} = \frac{\mathcal{A}(AEC)}{\mathcal{A}(BEC)} = \frac{\mathcal{A}(AEC) - \mathcal{A}(AEO)}{\mathcal{A}(BEC) - \mathcal{A}(BEO)} = \frac{\mathcal{A}(AOC)}{\mathcal{A}(BOC)}.$$

Analog se arată că

$$\frac{AF}{FC} = \frac{\mathcal{A}(AOB)}{\mathcal{A}(BOC)},$$

deci,

$$\frac{AE}{EB} + \frac{AF}{FC} = \frac{\mathcal{A}(AOC) + \mathcal{A}(AOB)}{\mathcal{A}(BOC)}.$$



Datorită aceleiaşi teoreme, avem

$$\frac{AO}{OD} = \frac{\mathcal{A}(AOB)}{\mathcal{A}(BOD)} = \frac{\mathcal{A}(AOC)}{\mathcal{A}(COD)} = \frac{\mathcal{A}(AOB)+\mathcal{A}(AOC)}{\mathcal{A}(BOD)+\mathcal{A}(COO)} = \frac{\mathcal{A}(AOB)+\mathcal{A}(AOC)}{\mathcal{A}(BOC)}.$$

Ţinând cont de ultimele două relaţii obţinute, concluzia este imediată. □

Încheiem prezentarea unor rezultate clasice din geometria triunghiului cu următoarea.

Teorema 4 (Teorema lui Ceva). *Fie ABC, un triunghi, şi punctele $D \in (BC)$, $E \in (AB)$, $F \in (AC)$, cu proprietatea $AD \cap BF \cap CE = \{O\}$. Atunci*

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{EA}{EB} = 1.$$

Demonstraţie. Conform Teoremei 1, având experienţa demonstraţiei precedente, putem scrie

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\mathcal{A}(BOD)}{\mathcal{A}(DOC)} = \frac{\mathcal{A}(ABD)}{\mathcal{A}(ADC)} = \frac{\mathcal{A}(ABD)-\mathcal{A}(BOD)}{\mathcal{A}(ADC)-\mathcal{A}(DOC)} = \frac{\mathcal{A}(AOB)}{\mathcal{A}(AOC)}.$$

În mod asemănător,

$$\frac{FC}{FA} = \frac{\mathcal{A}(BOC)}{\mathcal{A}(AOB)}, \quad \text{şi} \quad \frac{EA}{EB} = \frac{\mathcal{A}(AOC)}{\mathcal{A}(BOC)}.$$

Prin urmare, produsul rapoartelor din membrul stâng al concluziei devine

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{EA}{EB} = \frac{\mathcal{A}(AOB)}{\mathcal{A}(AOC)} \cdot \frac{\mathcal{A}(BOC)}{\mathcal{A}(AOB)} \cdot \frac{\mathcal{A}(AOC)}{\mathcal{A}(BOC)} = 1.$$

□

Demonstraţiile acestor trei teoreme au stârnit curiozitatea elevilor, aşa că le-am propus să caute singuri enunţul teoremei lui Menelaus şi, apoi, să ofere o demonstraţie similară cu cele lucrate împreună.

La următoarea întâlnire, feedbackul a fost cel aşteptat: toţi elevii s-au familiarizat cu Teorema lui Menelaus şi au demonstrat-o cu ajutorul proporţiilor între arii.

La această temă am lucrat cu elevii următoarea problemă.

Problema 1. $ABCD$ şi $CEFG$ sunt două dreptunghiuri, având un punct în comun şi interioarele disjuncte. Laturile CD şi CG formează unghiul ascuţit DCG. Să se arate că dacă $GG' \perp DC$, cu $G' \in DC$, $DD' \perp CG$, cu $D' \in CG$, şi $\frac{GG'}{BC} = \frac{DD'}{CE}$, atunci mediana din C, a triunghiului CBE, trece prin centrul cercului circumscris triunghiului DCG.

Olimpiada de Matematică, Etapa pe sector, 2017

Demonstraţie. Pentru început, introducem următoarele notaţii: O este centrul cercului circumscris triunghiului DCG, punctul P este mijlocul segmentului BE şi $k = \frac{GG'}{BC} = \frac{DD'}{CE}$. Construim $OM \perp CD$, cu $M \in CD$, şi $ON \perp CG$, cu $N \in CG$.

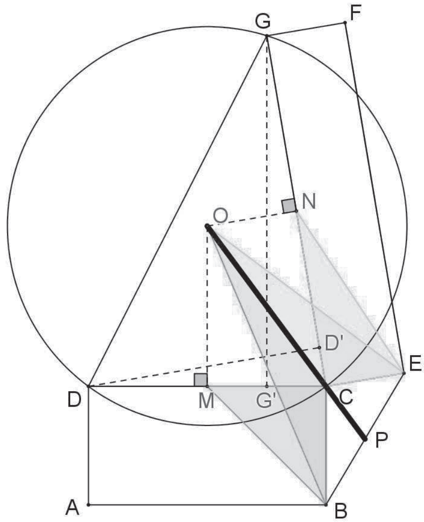
Vom arăta acum că cele două dreptunghiuri construite în exterior au aceeaşi arie. În acest sens, avem

$$\mathcal{A}(ABCD) = AB \cdot BC = \frac{AB \cdot GG'}{k} = \frac{2\mathcal{A}(DCG)}{k}$$

şi

$$\mathcal{A}(CGFE) = GC \cdot CE = \frac{GC \cdot DD'}{k} = \frac{2\mathcal{A}(DCG)}{k},$$

de unde rezultă că $\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(CEFG)$.



În continuare, vom arăta că punctele O, C şi P sunt coliniare. Din $OM \| BC$ rezultă că $\mathcal{A}(MBC) = \mathcal{A}(OBC)$, ca triunghiuri cu aceeaşi bază şi aceeaşi înălţime, şi, analog, $ON \| CE$ implică $\mathcal{A}(NCE) = \mathcal{A}(OCE)$. Pe de altă parte, cum $OM \perp CD$ şi $ON \perp CG$, rezultă că $DM = MC$, respectiv $CN = NG$. Cum $\mathcal{A}(OBC) = \mathcal{A}(MBC) = \frac{\mathcal{A}(ABCD)}{4}$ şi $\mathcal{A}(OCE) = \mathcal{A}(NCE) = \frac{\mathcal{A}(CEFG)}{4}$, rezultă că $\mathcal{A}(OBC) = \mathcal{A}(OCE)$. Din $BP = PE$ se obţine că CP este mediană în triunghiul CBE şi atunci $\mathcal{A}(BPC) = \mathcal{A}(CPE)$. Deci $\mathcal{A}(OBC) + \mathcal{A}(BPC) = \mathcal{A}(OCE) + \mathcal{A}(CPE)$, de unde rezultă că OP este mediană în triunghiul OBE, prin urmare punctele O, C şi P sunt coliniare.

Prof. Mihaela Berindeanu
Colegiul Naţional de Informatică ,,Tudor Vianu" din Bucureşti
E-mail: `kimmihaela@yahoo.com`