DIDACTICA MATEMATICĂ

SUPLIMENT AL GAZETEI MATEMATICE

ANUL al VIII-lea **Nr. 1/2018**

Modele de lecţii

Metoda eliminării

de DORU ŞTEFĂNESCU

Propunem o lecţie despre utilizarea metodei eliminării la studierea sistemelor liniare şi a matricilor. Metoda nu foloseşte determinanţii şi este avantajoasă din punct de vedere computaţional. Permite calcularea rapidă a soluţiilor unui sistem liniar, precum şi a rangului unei matrici.

Rezolvarea sistemelor liniare şi studierea matricilor şi a determinanţilor constituie scopul principal al elementelor de algebră, studiate în clasa a XI–a.

Există două căi principale de abordare a rezolvării sistemelor liniare. Una este utilizarea determinanţilor şi a regulii lui Cramer. Cealaltă este metoda eliminării. Vom face o prezentare a celei de-a doua, punctând felul în care poate fi folosită cu eficienţă la clasă. Printre avantajele utilizării eliminării menţionăm volumul mai mic de calcul şi studierea proprietăţilor matricilor fără a face apel la determinanţi.

Un exemplu

Exemplul 1. Ne propunem rezolvarea sistemului liniar

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+5z &=& 9\\ 2x+3y+12z &=& 23\\ 2y+5z &=& 11\end{array}\right. . \tag{1}$$

Scădem prima ecuaţie înmulţită cu 2 din a doua. Obţinem sistemul

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+5z &=& 9\\ y+2z &=& 5\\ 2y+5z &=& 11\end{array}\right. .$$

Scăzând a doua ecuaţie multiplicată cu 2 se ajunge la sistemul echivalent

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+5z &=& 9\\ y+2z &=& 5\\ z &=& 1\end{array}\right. .$$

Înlocuind valoarea lui z din a treia ecuaţie, apoi pe cea a lui y din a doua, acesta devine

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases},$$

de unde

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

şi ultimul sistem ne dă soluţia căutată.

Un sistem liniar cu 4 necunoscute

Exemplul 2. Să considerăm următorul sistem liniar cu coeficienţii numere raţionale

$$\begin{cases} x + y + z + 2t = 4 \\ 2x - y + 3z - t = 5 \\ -3x + y + z + 5t = 1 \\ x + 2y + 6z + 8t = 14 \end{cases}. \tag{2}$$

Vom da două soluţii, prima folosind determinanţi, iar cealaltă similară procedeului utilizat în primul exemplu.

Soluţia I. Vom stabili întâi dacă sistemul admite soluţii. Utilizând teorema de compatibilitate Kronecker–Capelli, calculăm rangurile matricii sistemului şi matricii extinse a sistemului:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \qquad A^{\mathrm{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Din calcule, folosind operaţii liniare cu linii, reiese că avem:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Deci rangul matricii A este cel mult 3 . Deoarece avem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 8 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

şi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -16 \neq 0\,,$$

din regula bordurilor reiese că rangurile matricilor A şi A^e sunt egale cu 3 . Prin urmare, sistemul este compatibil simplu nedeterminat, soluţiile depinzând de un parametru. Orientându–ne după ultimul determinant nenul, sistemul este echivalent cu

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 4-2t \\ 2x-y+3z & = & 5+t \\ x+2y+6z & = & 14-8t \end{array} \right. \tag{3}$$

Putem, deci, utiliza regula lui Cramer[1]. Notăm prin Δ determinantul sitemului şi prin Δ_x determinantul obţinut din Δ prin înlocuirea primei coloane cu coloana dată de termenii liberi ai sistemului (3). La fel se definesc Δ_y şi Δ_z . Obţinem soluţiile:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-12-12t}{-16} = \frac{3}{4}(1+t)\,, \\ y &= \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-25+31t}{-16} = \frac{25-31t}{16}\,, \\ z &= \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-27+13t}{-16} = \frac{27-13t}{16}\,. \end{aligned}$$

Soluţia a II-a. Vom elimina succesiv variabilele din ecuaţia (2), în aşa fel încât ecuaţia a doua să conţină cel puţin o variabilă mai puţin decât prima, a treia cel puţin o variabilă mai puţin decât a doua ş.a.m.d.

Se obţin succesiv sistemele echivalente cu (2):

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & +y & +z & +2t & = & 4 \\ & -3y & +z & -5t & = & -3 \\ & 4y & +4z & +11t & = & 13 \\ & y & +5z & +6t & = & 10 \end{array} \right. ,$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & +y & +z & +2t & = & 4 \\ & y & +5z & +6t & = & 10 \\ & -3y & +z & -5t & = & -3 \\ & y & +5z & +6t & = & 10 \end{array} \right. ,$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & +y & +z & +2t & = & 4 \\ & y & +5z & +6t & = & 10 \\ & & +16z & +13t & = & 27 \end{array} \right. .$$

[1]**Gabriel Cramer** (1704-1752), matematician elveţian. A studiat curbele algebrice şi a folosit cu succes metoda *poligonului lui Newton*. A dat o metodă generală de rezolvare a sistemelor liniare. Are cercetări importante privind teoria determinanţilor.

Ultimul sistem se rescrie astfel

$$\begin{cases} x + y + z = 4 - 2t \\ \quad y + 5z = 10 - 6t \\ \quad\quad +16z = 27 - 13t \end{cases}.$$

Din ultima ecuaţie se obţine valoarea lui z în funcţie de t. Aceasta se introduce în a doua ecuaţie şi se obţine y. În sfârşit, valorile lui y şi z se introduc în prima ecuaţie şi se obţine x. În final avem:

$$\begin{aligned} z &= \frac{27-13t}{16}, \\ y &= 10 - 6t - 5\frac{27-13t}{16} = \frac{25-31t}{16}, \\ x &= 4 - 2t - \frac{25-31t}{16} - \frac{27-13t}{16} = \frac{3}{4}(1+t), \end{aligned}$$

adică exact soluţiile obţinute prin prima metodă.

Câteva observaţii:

- Ambele procedee sunt accesibile elevilor de clasa a XI-a şi pot fi prezentate la clasă.
- În prima metodă, un rol esenţial este jucat de calculul determinanţilor.
- A doua metodă se bazează pe eliminarea succesivă a necunoscutelor.
- În exemplele considerate, a doua metodă este mai rapidă.
- Care dintre cele două procedee ar fi mai eficient dacă am considera un sistem cu 10 ecuaţii şi 10 necunoscute? Dar unul cu 20 de ecuaţii şi 18 necunoscute?

Metoda eliminării

Metoda eliminării a fost inventată de **Carl Friedrich Gauß**[2] pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare şi utilizată cu succes şi extinsă de **Camille Jordan**[3] la studierea matricilor. Ea permite obţinerea prin operaţii simple a soluţiilor sistemelor liniare, calcularea rangului şi studierea inversabilităţii matricilor fără a face apel la calculul unor determinanţi. Din punct de vedere computaţional, procedeul oferă avantajul obţinerii rapide a rezultatelor şi posibilitatea abordării unor probleme în care dimensiunile să fie mai mari. Algoritmul Gauß–Jordan poate fi scris cu uşurinţă în pseudocod, ceea ce permite programarea imediată.

Una dintre virtuţile metodei eliminării este evitarea calculării determinanţilor. Pentru ordine mari, calcularea unui determinant devine practic imposibilă chiar dacă sunt utilizate calculatoare cu o foarte mare putere de calcul... *textul integral în revista*

[2] **Carl Friedrich Gauß** (1777–1855), matematician german. A avut contribuţii esenţiale în aproape toate domeniile matematicii, dar şi în ştiinţele care folosesc matematica, în primul rând, în fizică şi geodezie. Este considerat unul dintre titanii matematicii din toate timpurile, fiind supranumit *Prinţul Matematicii*.

[3] **Camille Jordan** (1838–1922), matematician francez. A avut contribuţii semnificative în teoria grupurilor, algebra liniară, analiza matematică şi topologie. Studiile sale privind structura matricilor au fost determinante pentru dezvoltarea ulterioară a algebrei şi a geometriei.