- De fapt, în pofida acestor probleme, până la urmă tot vom logaritma, căci aceasta este tehnica naturală în context. Trebuie doar să gestionăm cu precauţie detaliile, aici fiind punctul sensibil al problemei. Şi, dealtfel, şi cel care-ţi cauzează nedumerirea: aici ai pierdut soluţia cu componente negative!

Revenind, tocmai observarăm că x este par. Din acest motiv

$$x^x = |x|^x,$$

deci ecuaţia noastră implică $2^x = |x|^x$, de unde, logaritmând (aici e salutar modulul; mulţumită lui, formula de calcul este acum funcţională), obţinem $x = x\log_2|x|$, de unde, cum $x \neq 0$, $\log_2|x| = 1$, adică $|x| = 2$, deci $x = -2$. Cum la acest caz am pierdut la un moment dat echivalenţa, să constatăm că $[2\cdot(-2)]^{-2} = (-4)^{-2} = \frac{1}{16} = (-2)^{-4} = (-2)^{2\cdot(-2)}$, deci a doua ecuaţie a sistemului este într-adevăr echivalentă cu $x = -2$, iar din prima ecuaţie obţinem $y = -4$.

- Nu-mi vine să cred că un sistem atât de simplu a putut conţine o astfel de „capcană”!

- În matematică ne putem aştepta oricând la astfel de surprize! Nu pleca, mai ai ceva de făcut!

- Dacă tot am rezolvat problema, să dau răspunsul, zâmbi Andrei şi aşternu pe foaie concluzia:

„Aşadar, soluţia sistemului constă în perechile $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ şi $\begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$.”

LECT. UNIV. DR. GABRIEL MINCU
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ, UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI
E-mail: gamin@fmi.unibuc.ro

Subiecte de examen

Simularea Examenului de Bacalaureat la Matematică *M_mate-info* (2018)

de NICOLAE ANGELESCU

Prezentăm simularea probei de matematică a Examenului de Bacalaureat. Pe lângă rezolvarea problemelor, discutăm câteva variante de soluţii şi includem comentarii metodologice.

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1. Calculaţi partea întreagă a numărului real $a = \sqrt[3]{125} + \sqrt{5}$. **5p**

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + m$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m, ştiind că $(f \circ f)(x) = f(x+1)$, pentru orice număr real x. **5p**

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{3x+5}$. **5p**

4. Determinaţi numărul de submulţimi cu cel puţin trei elemente ale mulţimii $A = \{0, 1, 2, ..., 9\}$. **5p**

5. Se consideră triunghiul MNP cu $MN = 6$, $MP = 8$ şi $m(\sphericalangle M) = 90°$. Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$. **5p**

6. Determinaţi numărul real x, ştiind că $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 2 = 0$ şi $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. **5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x)) = 0$. **5p**

b) Demonstraţi că $A(x) + A(1-x) = 2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr real x. **5p**

c) Determinaţi numerele reale x pentru care $A(x) \cdot A(1-x) = \frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)$. **5p**

2. Pe mulţimea $\mathbb{Z}_{20} = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, ..., \widehat{19}\}$ se defineşte legea de compoziţie

$$x \circ y = xy + \widehat{3}x + \widehat{3}y + \widehat{9}.$$

a) Demonstraţi că $x \circ y = \left(x + \widehat{3}\right)\left(y + \widehat{3}\right) + \widehat{10}$, pentru orice numere $x, y \in \mathbb{Z}_{20}$. **5p**

b) Determinaţi $a \in \mathbb{Z}_{20}$, ştiind că $a \circ x = \widehat{0}$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}_{20}$. **5p**

c) Daţi exemplu de $a, b \in \mathbb{Z}_{20} \setminus \{\widehat{17}\}$, pentru care $a \circ b = \widehat{0}$. **5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - \sqrt{x}$.

a) Arătaţi că $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = \frac{7}{2}$. **5p**

b) Determinaţi imaginea funcţiei f. **5p**

c) Demonstraţi că $2e^{2x} - e^{\frac{x}{2}} + \frac{3}{8} \geq 0$, pentru orice număr real x. **5p**

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

a) Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 f(\operatorname{tg} x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. **5p**

b) Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\, \mathrm{d}x$. **5p**

c) Demonstraţi că

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n+2} \leq (n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2(n+2)},$$

pentru orice număr natural nenul n. **5p**

Soluţii

SUBIECTUL I

1. $a = \sqrt[3]{125} + \sqrt{5} = 5 + \sqrt{5}$. Cum $2 < \sqrt{5} < 3$, avem $7 < 5 + \sqrt{5} < 8$, deci $[a] = 7$.

2. $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) + m = x + 2m$, în timp ce $f(x+1) = x + 1 + m$. Relaţia devine $x + 2m = x + 1 + m$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$. Deci, $m = 1$.

3. Cum $\frac{2}{3} \in (0,1)$, funcţia exponenţială $x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x$ este strict descrescătoare, prin urmare, inegalitatea devine $4x + 1 \geq 3x + 5$, adică $x \geq 4$ sau $x \in [4, +\infty)$.

4. Numărul submulţimilor cu k elemente, ale unei mulţimi cu n elemente, este C_n^k, prin urmare, avem de calculat $C_{10}^3 + C_{10}^4 + ... + C_{10}^{10} = 2^{10} - (C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2) = 2^{10} - (1 + 10 + 45) = 2^{10} - 56$.

5. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MR}$, unde R este astfel încât $MPRN$ să fie paralelogram. Cum $\mathrm{m}(\sphericalangle M) = 90^\circ$, paralelogramul $MPRN$ este dreptunghi, deci $MR = NP = 10$.

6. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 2 = 0$ devine $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + 2 = 0$ sau $\frac{\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x} = 0$, adică $\operatorname{tg} x = -1$, de unde $x = \frac{3\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Observaţie. Este cunoscut că, $(\forall)t \in \mathbb{R}$, avem $\left|t + \frac{1}{t}\right| \geq 2$, cu egalitate pentru $t = 1$ sau $t = -1$.

SUBIECTUL al II-lea

1. a) $\det(A(x)) = \frac{1}{2}[x^2 - (2x-1)^2] = \frac{1}{2}(1-x)(3x-1) = 0$. Obţinem $x = 1$ sau $x = \frac{1}{3}$.

Observaţie. Matricea $A(x)$ este inversabilă, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$.

b) $A(x) + A(1-x) = I_3$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$. Să remarcăm că, pentru $x = \frac{1}{2}$, $x = 1 - x$. Deci, $A\left(\frac{1}{2}\right) + A\left(\frac{1}{2}\right) = I_3$, de unde $A(x) + A(1-x) = 2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

c) Obţinem

$$A(x) \cdot A(1-x) = \begin{pmatrix} -5x^2 + 5x - 1 & 0 & -4x^2 + 4x - 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -4x^2 + 4x - 1 & 0 & -5x^2 + 5x - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} I_3,$$

de unde $-4x^2 + 4x - 1 = 0$, adică $x = \frac{1}{2}$.

Soluţie alternativă. Din b) obţinem $A(1-x) = I_3 - A(x)$, deci $A(x) \cdot A(1-x) = A(x) \cdot (I_3 - A(x)) = A(x) - A^2(x)$. Ecuaţia devine $A(x) - A^2(x) = \frac{1}{4} I_3$, adică $(2A(x)-I_3)^2 = O_3$ sau, observând că

$$2A(x)-I_3 = (2x-1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

deducem că $(2A(x)-I_3)^2 = O_3$ dacă $2x-1=0$, adică $x=\frac{1}{2}$.

2. a) Se verifică imediat.

b) Evident, dacă $x+\widehat{3}$ este un element inversabil în raport cu operaţia de înmulţire în inelul $(\mathbb{Z}_{20},+,\cdot)$, atunci $\widehat{0} = a\circ x = (a+\widehat{3})\cdot(x+\widehat{3})$. Trebuie ca $a+\widehat{3}=\widehat{0}$, adică $a=-\widehat{3}=\widehat{17}$.

Observaţie. $U(\mathbb{Z}_{20}) = \{x\in\mathbb{Z}_{20} | (x,20)=\widehat{1}\} = \{\widehat{1},\widehat{3},\widehat{7},\widehat{9},\widehat{11},\widehat{13},\widehat{17},\widehat{19}\}$. Se observă că, pentru $a=\widehat{17}$, $a\circ x=\widehat{0}$, $(\forall)x\in\mathbb{Z}_{20}$.

c) Cum $(\mathbb{Z}_{20},+,\cdot)$ este un inel comutativ, cu divizori ai lui zero, vom căuta $a,b\in\mathbb{Z}_{20}\setminus\{\widehat{17}\}$ astfel încât $(a+\widehat{3})\cdot(b+\widehat{3})=\widehat{0}$, de exemplu $a+\widehat{3}=\widehat{4}$ şi $b+\widehat{3}=\widehat{5}$ sau $a+\widehat{3}=\widehat{2}$ şi $b+\widehat{3}=\widehat{10}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2(x^2-1)-(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\left(2(x+1)-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) = \frac{7}{2}$.

Soluţie alternativă. Observând că $f(1)=1$, limita se poate scrie $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ şi, cum evident funcţia f este derivabilă, cu $f'(x)=4x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$, deducem $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ $= f'(1) = 4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$.

b) Avem de identificat mulţimea $\operatorname{Im} f = \{y\in\mathbb{R} \mid (\exists)x\in(0,+\infty), f(x)=y\}$. Cum funcţia f este continuă şi derivabilă, vom determina mulţimea $\operatorname{Im} f$ cu ajutorul derivatei de ordinul întâi, realizând tabelul de variaţie.

Avem $f'(x)=4x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(x)=0$ pentru $x=\frac{1}{4}$; $f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{8}$, $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} = +\infty$.

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\vert^{0}$	$\searrow$	$-\frac{3}{8}$ minim	$\nearrow$	$+\infty$

Vom obţine $\operatorname{Im} f = \left[-\frac{3}{8},+\infty\right)$.

c) Evident, o exploatare corectă a informaţiilor din tabelul de variaţie ne ajută să constatăm că $f(x)+\frac{3}{8}\geq 0$, adică $2x^2-\sqrt{x}+\frac{3}{8}\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. Cum $e^x\in(0,+\infty)$, pentru orice x real, deducem $2e^{2x}-e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\geq 0$, pentru orice număr real x.

2. a) Funcţia $\operatorname{arctg}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ este bijectivă, cu $\operatorname{arctg}^{-1} = \operatorname{tg}:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$. Avem, deci, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x$, $(\forall)x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$. În aceste condiţii,

$$\int_0^1 f(\operatorname{tg} x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Soluţie alternativă. Utilizând schimbarea de variabilă, avem:

$$\int_0^1 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\operatorname{tg}1} \operatorname{arctg} y \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 y\Big|_0^{\operatorname{tg}1} = \frac{1}{2},$$

unde $y = \operatorname{tg} x$.

b) Avem $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \operatorname{arctg} x \cdot (\operatorname{arctg} x)'\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{32}.$

c) Obţinem

$$(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = x^{n+1}f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x^{n+1}f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 x^{n+1}\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Remarcăm că, pentru $x \in [0,1]$, avem $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1$ şi, utilizând monotonia integralei definite, avem

$$\frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+2}$$

şi obţinem inegalitatea din enunţ.

Observaţie. Propunem următoarele cerinţe, sugerate de inegalitatea demonstrată.

Să se calculeze:

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x;$

ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x;$

iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\operatorname{tg}\left((n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right).$

Comentarii

Varianta propusă la simulare respectă structura cunoscută: trei subiecte a câte 30 de puncte fiecare. Subiectul I conţine întrebări din materiile claselor a IX-a şi a a X-a, cu un grad scăzut de dificultate, subiectul al II-lea cuprinde algebră, materiile claselor a XI-a şi a XII-a, iar subiectul al III-lea, analiză matematică, materiile claselor a XI-a şi a XII-a.

Subiectele II şi III conţin câte două probleme enunţate în forma ,,itemi structuraţi", asigurându-se o ridicare graduală a nivelului de dificultate.

PROF. NICOLAE ANGELESCU
COLEGIUL NAŢIONAL ,,MIHAI VITEAZUL", PLOIEŞTI
E-mail: nicolaeangelescu@gmail.com