Asupra necesităţii condiţiilor suplimentare

de Gabriel Mincu

Expunem câteva rezolvări de probleme în care intervin forme echivalente ale unor ecuaţii. Neverificarea soluţiilor şi neglijarea unor condiţii suplimentare, privind formele intermediare, pot conduce la soluţii greşite sau incomplete.

- Domnule profesor, mă întrebă Andrei – elev în clasa a XII-a – după simularea, recent desfăşurată, a examenului de bacalaureat la matematică, am făcut o problemă de la simulare, altfel decât în barem, şi aş vrea să vă întreb dacă am făcut-o corect.

- Să vedem problema despre care e vorba şi cum ai făcut-o, i-am răspuns.

Andrei scoase o foaie cu probleme. Întrebarea se referea la subiectul III. În esenţă, punctul ,,cu nelămuriri” era următorul:

Problema 1. *Arătaţi că, pentru* $a \in (-\sqrt{2}, -1)$, *ecuaţia* $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}} = a$ *are două soluţii reale distincte.*

- Aha. Şi cum ai făcut-o tu?

- Am rescris ecuaţia sub forma

$$x^2 = a^2x^2 + 2a^2x + 2a^2, \tag{1}$$

adică

$$(a^2-1)x^2 + 2a^2x + 2a^2 = 0,$$

şi am impus condiţia

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow a^4 - 2a^2(a^2-1) > 0 \Leftrightarrow a^2(2-a^2) > 0,$$

care e îndeplinită pentru orice $a \in (-\sqrt{2}, -1)$. E corect? ...

- Desigur, nu!

Eroarea nu este, însă, reprezentată de metoda propriu-zisă de abordare, care este perfect legitimă, ci de neglijarea, chiar din start, a faptului că, după rescrierea ecuaţiei sub forma $x^2 = a^2x^2 + 2a^2x + 2a^2$, se obţine o ecuaţie *care nu este echivalentă cu cea iniţială*! Din acest motiv, mulţimea $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus$

$\{-1, 0, 1\}$, a valorilor lui a pentru care ecuaţia (1) are două soluţii reale distincte, nu coincide cu mulţimea $(-\sqrt{2}, -1)$ a valorilor parametrului a, pentru care ecuaţia iniţială are două soluţii reale şi distincte.

Totuşi, soluţia lui Andrei devine, cu corecturile de rigoare, funcţională. Punctul care trebuie gestionat cu îngrijire este acela că $x \in \mathbb{R}$ este soluţie a ecuaţiei iniţiale dacă şi numai dacă x este soluţie a ecuaţiei (1) şi are acelaşi semn ca a. Din acest motiv, cerinţa ca ecuaţia din enunţ să aibă două soluţii reale este, de fapt, echivalentă cu aceea ca ecuaţia (1) să aibă două rădăcini reale distincte care au acelaşi semn ca a.

Această condiţie este echivalentă cu sistemul[1]

$$\begin{cases} a^2 - 1 \neq 0 \\ a^4 - 2a^2(a^2 - 1) > 0 \\ \dfrac{2a^2}{a^2 - 1} \geq 0 \\ -\dfrac{2a^2}{a^2 - 1} \cdot a \geq 0 \end{cases},$$

care are soluţia $a \in (-\sqrt{2}, -1)$. Deci pentru toate valorile $a \in (-\sqrt{2}, -1)$ ecuaţia dată are două soluţii reale distincte.

De fapt, mai întâlnisem recent situaţii în care elevii nu sesizaseră că în cazul problemelor de factura celei precedente este nevoie să impunem condiţii suplimentare ecuaţiei „prelucrate" pentru a conserva echivalenţa între sistemul de condiţii impus parametrului din ecuaţia „prelucrată" şi cel impus de enunţ asupra formei iniţiale.

De exemplu, Alexandru mi-a semnalat acum câteva zile următoarea problemă:

Problema 2. *Pentru expresia* $E(x, m) = m \cdot 3^{2x} - 2(m-1) \cdot 3^x + m + 3$ *notăm*

$$M = \{m \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ E(x, m) > 0\}.$$

Alegeţi varianta corectă:
a) $M = \emptyset$; b) $M = \left(\dfrac{1}{5}, +\infty\right)$; c) $M = (0, +\infty)$; d) $M = [0, +\infty)$; e) $M = \mathbb{R}$.

Alexandru pusese $y = 3^x$, rescrisese condiţia definitorie a lui M sub forma $my^2 - 2(m-1)y + m + 3 > 0$ şi impusese condiţiile $m > 0$ şi $\Delta < 0$, obţinând, astfel, $M = \left(\dfrac{1}{5}, +\infty\right)$.

Fiind, însă, familiarizat şi cu strategii de abordare a testelor grilă, căci se pregăteşte pentru admiterea la Universitatea Politehnica din Bucureşti, Alexandru „făcuse $m = 0$" şi constatase că „dă". Acest lucru invalida, însă (printre altele!), varianta b), obţinută de el ca mai sus, iar neconcordanţa îl sâcâia.

[1]Pentru o discuţie mai detaliată asupra modului în care anumite proprietăţi ale funcţiilor de gradul II se „traduc" în sisteme de ecuaţii şi inecuaţii, trimitem cititorul la articolul [2].

Unde era eroarea? Desigur, în acelaşi loc în care fusese şi cea a lui Andrei. Mai precis, ţinând cont că 3^x ia toate valorile din $\mathbb{R}_+^*$ şi numai pe acestea, condiţia ,,$\forall x \in \mathbb{R}$, $E(x,m) > 0$” este echivalentă cu ,,$\forall y > 0\, my^2 - 2(m-1)y + m + 3 > 0$”. Ultima condiţie este, într-adevăr, verificată pentru $m > 0$ şi $\Delta < 0$, dar nu numai. Mai precis, inegalitatea $my^2 - 2(m-1)y + m + 3 > 0$ va fi verificată de orice număr strict pozitiv fie dacă parabola asociată funcţiei de y din membrul stâng nu taie deloc axa Ox, fie dacă o taie doar în puncte de abscisă negativă (în oricare dintre situaţii parabola fiind plasată ,,cu vârful în jos”, altminteri, ar lua cu certitudine valori negative pentru valori ,,mari” ale lui y). Prin urmare, pe lângă cazul în care $m > 0$ şi $\Delta < 0$ considerat de Alexandru, mai trebuie avut în vedere şi cel în care $m > 0$, $\Delta \geq 0$, iar cele două rădăcini ale funcţiei de y din membrul stâng, y_1 şi y_2, sunt negative.

Această, din urmă, condiţie poate fi, desigur, impusă fie de o manieră algebrică, sub forma

$$\begin{cases} y_1 y_2 \geq 0 \\ y_1 + y_2 \leq 0 \end{cases},$$

fie de o manieră geometrică: originea axei Ox este în afara rădăcinilor sau chiar rădăcină, iar vârful parabolei are abscisa negativă. Calculatoriu,

$$\begin{cases} m \cdot 0^2 - 2(m-1) \cdot 0 + m + 3 \geq 0 \\ \dfrac{m-1}{m} \leq 0 \end{cases}.$$

În oricare dintre variante obţinem, pentru sistemul aferent celui de-al doilea caz, soluţia $m \in \left(0, \frac{1}{5}\right]$.

Reunind soluţiile anterioare, obţinem $m \in (0, +\infty)$.

- Mda, mormăi Alexandru finalizând calculele, obţinem alt rezultat, dar dilema mea rămâne: tot nu l-am găsit pe zero!

Îl felicit în gând pe Alexandru pentru faptul că a reuşit să fie atent şi la detaliile de calcul, şi la imaginea de ansamblu, dându-şi imediat seama că nici noul răspuns nu este compatibil cu constatarea lui anterioară.

- Corect! Îţi dai seama ce neajuns mai prezintă soluţia?

- Nnnnnuuu...

- Ei bine, în astfel de situaţii apare frecvent următorul tip de eroare: ne concentrăm pe proprietăţile pe care trebuie să le aibă graficul şi rădăcinile funcţiei cu care lucrăm, în exemplul nostru, $f(y) = my^2 - 2(m-1)y + m + 3$, şi tindem, atenţi la modul în care aplicăm tehnicile calculatorii aferente expresiilor de gradul II, să neglijăm faptul că *funcţia noastră nu e de gradul II chiar pentru toate valorile lui m!* Evident, pentru valorile parametrului care ne scot din sfera funcţiilor de gradul II, abordarea noastră de până acum îşi pierde orice legitimitate.

- Şi atunci ce facem? întrebă Alexandru.

- Atunci vom considera fiecare astfel de valoare m separat, vom vedea ce formă are condiţia pentru respectiva valoare, şi vom decide, folosind tehnici specifice noului context, dacă valoarea face parte din soluţia problemei sau nu. În cazul nostru concret, singura valoare a lui m pentru care $f(y)$ nu este de gradul II este 0. Pentru $m = 0$, condiţia din enunţ este echivalentă cu „$\forall y > 0$, $2y + 3 > 0$”, care este, în mod evident, adevărată, deci valoarea $m = 0$ trebuie adăugată la soluţia problemei.

- Deci, soluţia e $M = \{0\} \cup (0, +\infty) = [0, +\infty)$, adică varianta d).

- Corect!

Nu cu mult timp în urmă, Maria, elevă în clasa a XII-a şi ea, îmi ceruse părerea asupra unei probleme dintr-o culegere de teste pentru pregătirea admiterii la Universitatea Politehnica din Bucureşti [1, p.176, pb.3.1329A]:

Problema 3. *Determinaţi valorile parametrului real m pentru care ecuaţia $\sin x \sin 3x = m$ nu are soluţii.*
a) $m > 1$; b) $m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; c) $m \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{9}{16}, +\infty\right)$;
d) $m \in \left[-1, \frac{9}{16}\right]$; e) $m \leq -1$; f) $m \in [-1, 0]$.

Maria scrisese $\sin 3x$ ca $3 \sin x - 4 \sin^3 x$ şi obţinuse ecuaţia $3 \sin^2 x - 4 \sin^4 x = m$; după notaţia $t = \sin^2 x$, ajunsese la ecuaţia $4t^2 - 3t + m = 0$, căreia îi impusese condiţia

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 9 - 16m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{9}{16},$$

şi era derutată de lipsa din grila de răspunsuri a variantei $\left(\frac{9}{16}, +\infty\right)$.

Eroarea este, desigur, de aceeaşi factură cu cele din exemplele anterioare: după ce notăm $\sin^2 x$ cu t, nu toate soluţiile ecuaţiei în t corespund la soluţii ale ecuaţiei iniţiale. Mai precis, dacă observăm că $\sin^2 x$ ia, când x parcurge $\mathbb{R}$, toate valorile din $[0, 1]$ şi numai pe acestea, problema iniţială este echivalentă cu următoarea:

Problema 4. *Găsiţi valorile parametrului real m pentru care ecuaţia $4t^2 - 3t + m = 0$ nu are nicio soluţie în intervalul $[0, 1]$.*

Pe această formă constatăm că, pe lângă varianta fără rădăcini reale propusă de Maria, apare şi posibilitatea ca ecuaţia $4t^2 - 3t + m = 0$ să aibă rădăcini în mulţimea $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$. Valorile m corespunzătoare acestei situaţii vor face parte din soluţia problemei, dar nu se vor afla printre cele găsite de Maria. Pentru a găsi aceste valori, notăm cu $f(t)$ funcţia dată de formula $4t^2 - 3t + m$ şi remarcăm că abscisa vârfului parabolei corespunzătoare este $\frac{3}{8}$. Aşa stând lucrurile, singura posibilitate ca $f(t)$ să aibă două rădăcini în mulţimea $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ este ca aceste rădăcini să se afle de o parte şi de alta a intervalului $[0, 1]$, situaţie caracterizată de sistemul de condiţii

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ 4f(0) < 0 \\ 4f(1) < 0 \end{cases},$$

care este echivalent cu

$$\begin{cases} m \leq \frac{9}{16} \\ m < 0 \\ 1 + m < 0 \end{cases},$$

având, prin urmare, soluţia $m \in (-\infty, -1)$.

Soluţia problemei propuse de Maria este, aşadar,

$$m \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{9}{16}, +\infty\right),$$

adică varianta c).

Privind retrospectiv exemplele de mai sus, remarcăm faptul că, în cazul fiecăruia, era posibilă atât abordarea pe care am prezentat-o noi (care este potrivită pentru elevii de clasele a IX-a sau a X-a), cât şi cea în care parametrul este izolat într-unul dintre membri (ecuaţiile care au apărut în primul şi în ultimul exemplu din text sunt, de la bun început, într-o astfel de formă), iar valorile pe care le poate lua acesta sunt găsite în urma studiului variaţiei funcţiei din celălalt membru – abordare la îndemâna elevilor care au studiat deja materia de clasa a XI-a.

Nu în ultimul rând, se cuvine repetat faptul că în raţionamentele elevilor au apărut erori care se încadrează într-un tipar des întâlnit: întrucât nu menţionează explicit relaţionările logice dintre formele consecutive ale ecuaţiilor, ei tind să considere în mod tacit că acestea ,,nu ridică probleme” (tehnic vorbind, că au de a face cu echivalenţe), şi să piardă în acest mod din vedere necesitatea anumitor demersuri ulterioare (verificare a soluţiilor, introducere de condiţii suplimentare, etc), lucru care le afectează corectitudinea raţionamentelor şi îi conduce la concluzii eronate.

BIBLIOGRAFIE

[1] M. Craiu, G. Oprişan, O. Stănăşilă, C. Udrişte (coordonatori), *Teste de matematică*, Editura Politehnica Press, Bucureşti, 2016.

[2] L. Panaitopol, *Funcţia de gradul al II-lea*, Didactica Matematică nr. 2(2012), pp. 14-19.

LECT. UNIV. DR. GABRIEL MINCU
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ, UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI
E-mail: `gamin@fmi.unibuc.ro`