Ghidul profesorului

Prezentarea problemelor de la examenul de bacalaureat din Italia din 2016

de Victor-Ioan Nicolae şi Vlad Copil

În lucrarea de faţă ne propunem să prezentăm problemele date anul trecut la examenul de bacalaureat din Italia, prin aceasta urmărind să evidenţiem ce cunoştinţe se presupune că are un absolvent de liceu ştiinţific din Italia.

Introducere

La sesiunea 2016 a examenului de bacalaureat din Italia, specializarea „Ştiinţific" (analoagă specializării Matematică-Informatică), examenul a fost format din:

- două probleme, dintre care elevii trebuie să rezolve una la alegere;
- o listă de 10 exerciţii obligatorii.

Timpul de lucru a fost de 6 ore, iar candidaţii puteau folosi un calculator ştiinţific.

În ceea ce priveşte cele două probleme la alegere, accentul cade asupra unor probleme de analiză matematică, o atenţie deosebită fiind acordată lecturii grafice. Rezolvarea problemelor presupune realizarea unor raţionamente destul de elaborate, elevii trebuind să facă în mod continuu transferul informaţiilor de natură numerică în informaţii de natură grafică şi reciproc. În schimb, exerciţiile verifică însuşirea unor tehnici de calcul punctuale, de exemplu, a unor metode de calcul a integralelor sau a formulelor de geometrie analitică în spaţiu.

Structura examenului

Problema 1. *Administratorul unui bloc mic trebuie să instaleze un rezervor nou de motorină pentru încălzire. Nefiind mulţumit de modelele existente în comerţ, îţi dă sarcina să proiectezi unul care să corespundă nevoilor blocului.*

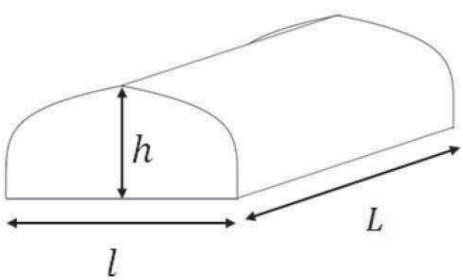


Figura 1

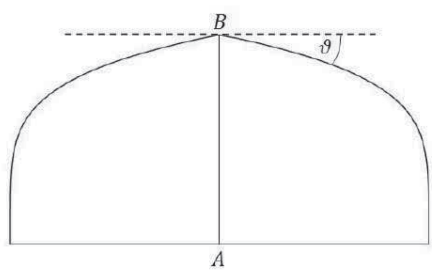


Figura 2

Administratorul îţi dă desenul din figura 1, adăugând următoarele indicaţii:

- *lungimea rezervorului* $L = 8$ *m;*
- *lăţimea rezervorului* $l = 2$ *m;*
- *înălţimea rezervorului* $h = 1$ *m;*
- *profilul frontal (figura 2) trebuie să aibă un punct unghiular la vârf, pentru a evita acumularea gheţii pe timpul iernii, cu un unghi* $\vartheta \geq 10°$*;*
- *capacitatea rezervorului trebuie să fie de cel puţin* 13 m^3*, pentru ca să poată asigura încălzirea blocului, pe tot parcursul iernii efectuându-se doar două alimentări cu motorină;*
- *pe mijlocul peretelui lateral al rezervorului, de-a lungul axei de simetrie (segmentul* AB *din figura 2) trebuie să se monteze un indicator gradat care să arate procentul de umplere* V *a volumului rezervorului în funcţie de nivelul* z *la care a ajuns înălţimea motorinei.*

1. *Considerând, ca origine a sistemului cartezian de axe, punctul* A *din figura 2, alege dintre următoarele familii de funcţii pe cea care poate să descrie cel mai bine profilul lateral al rezervorului, pentru* $x \in [-1, 1]$, $k \in \mathbb{N}$, *motivând alegerea făcută:*

- $f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}}$;
- $g(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1$;
- $h(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$.

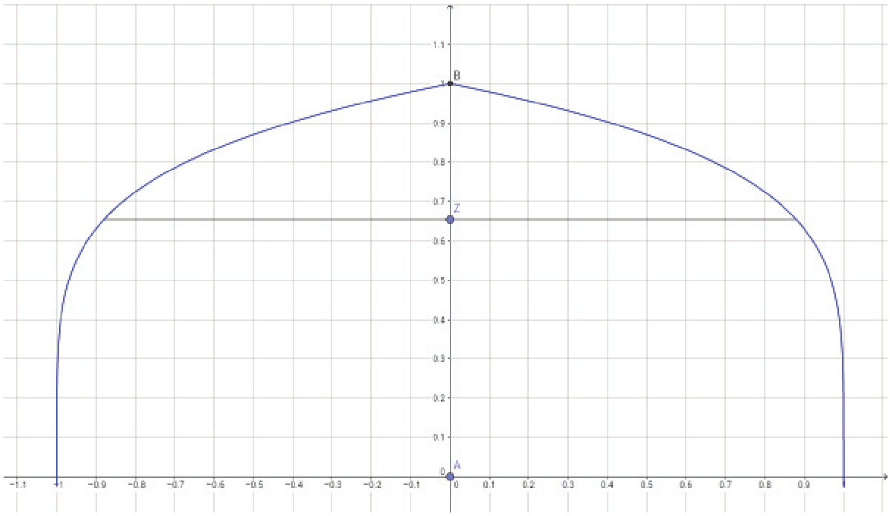
2. *Determină valoarea lui* k *ce permite îndeplinirea cerinţei referitoare la unghiul* ϑ *şi la volumul rezervorului.*

3. *Pentru a realiza indicatorul gradat, determină expresia funcţiei* $V(z)$ *care asociază nivelului* z *al motorinei (măsurat în metri) procentul de umplere* V *a volumului care trebuie trecut pe indicator.*

Când te duci să predai proiectul, administratorul obiectează că, din moment ce rezervorul are 1 *m înălţime, valoarea* z*, a nivelului motorinei, exprimată în cm, trebuie să corespundă procentului de umplere: adică, de exemplu, dacă motorina ajunge la un nivel* $z = 50$ *cm, înseamnă că rezervorul este plin* 50%*; în schimb, indicatorul tău arată în dreptul înălţimii de* 50 *cm un procent de umplere de* $59,7\%$.

4. *Prezintă argumentele pe care le poţi folosi ca să-i explici administratorului că raţionamentul său este greşit: arată şi care este, în valoare absolută, eroarea maximă care se face utilizând nivelul* z *ca indicator al procentului de umplere, aşa cum sugerează el, precum şi valoarea lui* z *pentru care se realizează această eroare.*

Soluţie. 1. Ţinând cont de existenţa axei de simetrie, vom restrânge studiul respectivelor funcţii la intervalul $[0; 1]$. Din schiţă deducem că graficul funcţiei căutate trece prin punctele $(-1; 0)$, $(0; 1)$ şi $(1; 0)$.



În ceea ce priveşte funcţia h, avem $h'(x) = -\frac{k\pi x^{k-1}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$, deci $h'(0) = 0$, ceea ce înseamnă că nu putem avea un punct unghiular în origine, aşa cum indică schiţa.

Pentru funcţia g, din $g(1) = 0$ rezultă $k = 1$. Astfel, pe $[0;1]$ funcţia devine $g(x) = -6x^3 + 9x^2 - 4x + 1$. Prin derivare, obţinem $g''(x) = -36x + 18$, ceea ce ar însemna că $x = \frac{1}{2}$ este punct de inflexiune, iar g este convexă pe $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ şi concavă pe $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, ceea ce nu corespunde imaginii.

Rămâne, ca ultimă posibilitate, $f(x) = (1-x)^{\frac{1}{k}}$, $x \in [0;1]$. Această funcţie are proprietatea $f'(x) = -\frac{1}{k}(1-x)^{\frac{1}{k}-1}$, deci $f'_d(0) = -\frac{1}{k} < 0$. De asemenea, $f''(x) = \frac{1-k}{k^2}(1-x)^{\frac{1}{k}-2} < 0$, pentru $x \in (0;1)$; deoarece avem atât punct unghiular în 0, cât şi concavitate, rezultă că f este funcţia căutată.

2. Conform punctului 1, am ales funcţia $f(x) = (1-x)^{\frac{1}{k}}$. Aceasta are proprietatea că $f'_d(0) = -\frac{1}{k}$. Faptul că în vârf trebuie să avem un unghi de cel puţin 10° revine la condiţia ca panta tangentei la grafic în punctul B trebuie să fie mai mică decât $\operatorname{tg} 10^\circ \simeq -0,176$. Deci $-\frac{1}{k} \leq -0,176$, altfel scris, $k \leq 5,88$ şi, cum $k \in \mathbb{N}$, avem $k \leq 5$ (1).

Pe de altă parte, trebuie să punem condiţia ca $V \geq 13\ \mathrm{m}^3$. Volumul este dat de formula $V = \mathcal{A}_b \cdot L$, unde $\mathcal{A}_b$ este aria bazei, adică a feţei reprezentate grafic. Aria bazei se calculează cu ajutorul integralei

$$\mathcal{A}_b = 2\int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{k}}\,\mathrm{d}x = -2 \cdot \left.\frac{(1-x)^{\frac{1}{k}+1}}{\frac{1}{k}+1}\right|_0^1 = \frac{2k}{k+1},$$

deci este necesar ca

$$8 \cdot \frac{2k}{k+1} \geq 13 \Leftrightarrow k \geq \frac{13}{3},$$

ceea ce revine la $k \geq 5$ (2).

Din (1) şi (2) obţinem $k = 5$.

3. Pentru a determina expresia funcţiei V este necesar să calculăm aria porţiunii din secţiune până la înălţimea z. Funcţia

$$f : [0;1] \to [0;1], \quad f(x) = (1-x)^{\frac{1}{5}}$$

este inversabilă, inversa sa fiind

$$f^{-1} : [0;1] \to [0;1], \quad f^{-1}(y) = 1 - y^5,$$

iar aria căutată este egală cu integrala acestei funcţii între 0 şi z. Astfel:

$$V(z) = \frac{\int_0^z (1-y^5)\,\mathrm{d}y}{\int_0^1 (1-y^5)\,\mathrm{d}y} \cdot 100 = \frac{y - \frac{y^6}{6}\Big|_0^z}{y - \frac{y^6}{6}\Big|_0^1} \cdot 100 = 100 \cdot \left(\frac{6z - z^6}{5}\right).$$

Într-adevăr, această funcţie are proprietatea $V(0,5) = 59,6875 \simeq 59,7$.

4. Volumul de motorină nu creşte proporţional cu înălţimea combustibilului deoarece rezervorul nu are o secţiune constantă. Pentru estimarea erorii considerăm funcţia

$$d : [0;1] \to \mathbb{R}, \quad d(z) = 100 \cdot \left(\frac{6z - z^6}{5} - z\right) = 20(z - z^6).$$

Derivata sa este $f'(z) = 20(1 - 6z^5)$, deci eroarea maximă se obţine pentru $z = \sqrt[5]{\frac{1}{6}}$, fiind de aproximativ $d(z) \simeq 11,6\%$.

Astfel, la un nivel al motorinei de $z = \sqrt[5]{\frac{1}{6}} \simeq 70$ cm, metoda de calcul sugerată de către administrator ar conduce la un volum de $0,7 \cdot \frac{40}{3} \simeq 9,33\ \mathrm{m}^3$, când, în realitate, volumul de motorină este

$$16 \cdot \left(0,7 - \frac{0,7^6}{6}\right) \simeq 10,88\ \mathrm{m}^3.$$

Problema 2. *În figura 3 este reprezentat graficul Γ, al funcţiei continue $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, derivabilă pe $(0,+\infty)$, şi sunt indicate coordonatele unor puncte.*

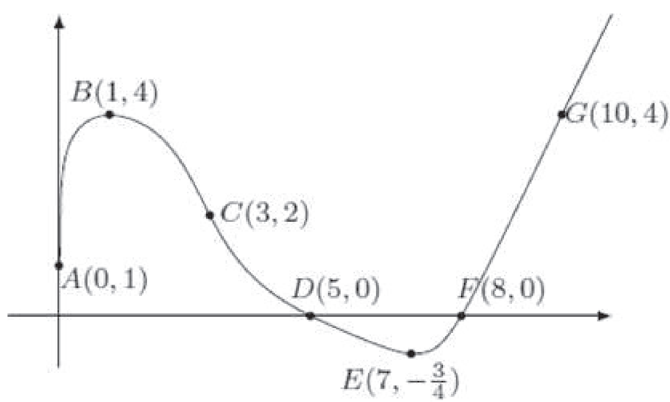


Figura 3

Se ştie că Γ este tangent la axa Oy în punctul A, că B este punct de maxim şi E este punct de minim, că C este punct de inflexiune unde tangenta are ecuaţia $2x + y - 8 = 0$.

În punctul D dreapta tangentă are ecuaţia $x+2y-5 = 0$ şi, pentru $x \geq 8$, graficul este reprezentat de o semidreaptă care trece prin punctul G. Se ştie, de asemenea, că aria regiunii delimitate de arcul $ABCD$, de axa Ox şi de axa Oy este egală cu 11, în timp ce aria regiunii delimitate de arcul DEF şi de axa Ox este egală cu 1.

1. *Pe baza informaţiilor disponibile, schiţaţi graficele funcţiilor*

$$y = f'(x) \text{ şi } F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Care sunt valorile pentru $f'(3)$ şi $f'(5)$? Motivaţi răspunsurile date.

2. *Schiţaţi graficele următoarelor funcţii:*

$$y = |f'(x)|, \quad y = |f(x)|', \quad y = \frac{1}{f(x)},$$

specificând domeniul fiecărei funcţii.

3. *Determinaţi valorile medii pentru $y = f(x)$ şi $y = |f(x)|$ pe intervalul $[0, 8]$, valoarea medie pentru $y = f'(x)$ pe intervalul $[1, 7]$ şi valoarea medie a funcţiei $y = F(x)$ pe intervalul $[9, 10]$.*

4. *Scrieţi ecuaţiile dreptelor tangente la graficul funcţiei $F(x)$ în punctele de abscisă 0 şi 8, motivând răspunsurile date.*

Soluţie. 1. Pe baza graficului şi din enunţ, deducem că f nu este derivabilă în 0, dar există $f'_d(x) = +\infty$. De asemenea, în punctele de extrem avem $f'(1) = f'(7) = 0$; în punctul de inflexiune avem $f''(3) = 0$. Întrucât dreapta $2x+y-8 = 0$ este tangentă la Γ în punctul C, deducem că $f'(3) = -2$; analog, avem $f'(5) = -\frac{1}{2}$. Deoarece panta dreptei FG este 2, rezultă că, pentru $x \geq 8$, $f'(x) = 2$.

În ceea ce priveşte funcţia F avem $F(0) = 0$ şi, pentru $0 < x \leq 5$, $F(x) > 0$. Întrucât aria delimitată de axele de coordonate şi de arcul $ABCD$ este 11, avem $F(5) = 11$. Deoarece aria delimitată de axa absciselor şi de arcul DEF este egală cu 1, vom avea $F(7) > 0$ şi $F(8) = 11 - 1 = 10$. Pentru $8 \leq x \leq 10$, subgraficul lui f va fi un triunghi dreptunghic, având aria 4, deci $F(10) = 14$.

Pe baza tuturor acestor informaţii putem completa tabelul de mai jos.

x	0	1	3	5	7	8	10
$f(x)$	1	4	2	5	$-\frac{3}{4}$	0	4
$f'(x)$	$f'_d(0) = +\infty$	0	-2	$-\frac{1}{2}$	0	2	2
$F(x)$	0	$+$	$+$	11	$+$	10	14

Notă: Textul integral se găseşte în revista tipărită.