Probleme de olimpiadă

Comentariu la o problemă dată la Olimpiada Naţională

de Artur Bălăucă

Vă prezentăm un comentariu la problema de geometrie dată elevilor de clasa a VI-a în anul 2012 la Olimpiada Naţională de Matematică, care s-a desfăşurat la Bistriţa.

Precizăm că problema nu a fost finalizată de vreun elev, de unde conchidem că a fost dificilă pentru un începător în abordarea geometriei iar soluţia din baremul de corectură a fost pe înţelesul unui număr mic de elevi.

După opinia noastră, soluţiile din baremul de corectură la orice concurs de matematică trebuie să fie cât mai detaliate şi problemele selectate de comisie (dacă are de unde alege) să aibă mai multe soluţii, eventual fiecare cu barem de corectură şi evaluare, pentru ca un număr cât mai mare de participanţi să-şi regăsească soluţiile elaborate. În acest fel se reduc semnificativ contestaţiile elevilor.

Enunţul problemei. *Se consideră triunghiul echilateral ABC şi X un punct pe semidreapta $(CA$ astfel încât $A \in (CX)$. Pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAX$ se consideră punctul D iar pe semidreapta $(AB$ punctul E astfel încât $AE+EC = DA + AC$.*

Demonstraţi că semidreapta $(CD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACE$.

Soluţia din baremul de evaluare. Fie $D' \in AB$ şi $E' \in AC$ astfel încât $AD' = AD$ şi $CE' = CE$. În triunghiul ADD' avem $m(\sphericalangle DAD') = 60^o$ şi $AD' = AD$, deci triunghiul este echilateral şi rezultă că $AD = DD'$.

Apoi,

$$AE + EC = AD + AC,$$

de unde $AE+E'C = AD'+AC$ şi atunci $AE-AD' = AC-E'C$ iar $D'E = AE'$.

Congruenţa triunghiurilor DAE' şi $DD'E$ (L.U.L.) implică $DE = DE'$ iar cea a triunghiurilor DEC şi $DE'C$ (L.L.L.) implică congruenţa

$$\sphericalangle DCE \equiv \sphericalangle DCE'.$$

Rezultă că CD este bisectoarea unghiului ECA.

Observaţii

1. La discuţia subiectelor cu participanţii la olimpiadă am observat că elevii nu au înţeles soluţia dată în barem.

2. Întrebarea care domina era: unde sunt situate punctele D' şi E' pe dreapta AB şi, respectiv, AC?

3. Soluţia din barem trebuia să fie însoţită de figurile 1 şi 2 şi de precizarea că punctele $D' \in (AB$, $E' \in (CA$ şi $(CD$ este bisectoarea unghiului ECA.

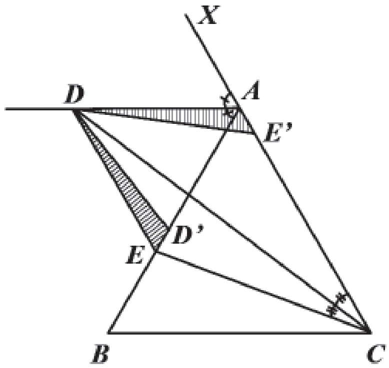

Fig. 1

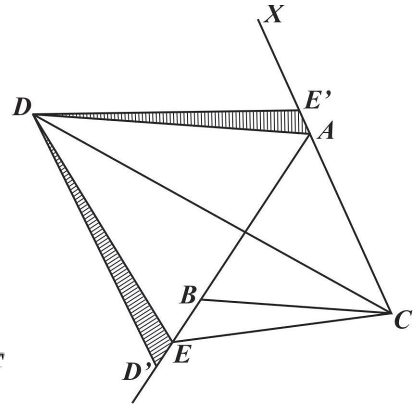

Fig. 2

Acum, vă prezentăm şi alte idei de construcţii auxiliare care conduc la finalizarea problemei.

4. Având în ipoteza problemei relaţia

$$AE + EC = DA + AC,$$

din start trebuie să ne ducă gândul la o construcţie auxiliară astfel încât în noua configuraţie să apară triunghiuri congruente.

5. Reamintim că eleganţa soluţiei unei probleme de geometrie iese în evidenţă în special atunci când are la bază construcţii auxiliare, deoarece în acest caz solicită multă inventivitate şi chiar creativitate din partea celui care se apleacă asupra problemei.

În continuare, vă prezentăm două soluţii ale problemei.

Soluţia I. Vom analiza trei cazuri: $E \in (AB)$, $B \in (AE)$ şi $B \equiv E$.

Cazul I – $E \in (AB)$. Fie punctele P şi N astfel încât $P \in (AB)$, $N \in (AC)$, $AN = AC - EC$ şi $(AD) \equiv (AP)$. Punctele N şi P există deoarece $AC > EC$ şi $AD < AC$ (a se vedea Figura 3). Cum

$$AE - AD = AC - CE,$$

rezultă $(AN) \equiv (EP)$. Triunghiul APD este echilateral, deci $(DP) \equiv (AP)$ şi $m(\sphericalangle DPE) = 120^o$. Atunci $\Delta AND \equiv \Delta PED$ (L.U.L.). Deci $(ED) \equiv (DN)$ şi, cum $(CE) \equiv (CN)$, rezultă că dreapta CD este mediatoarea segmentului (EN). Prin urmare, în triunghiul isoscel CNE, $(CD$ este bisectoarea unghiului ACE.

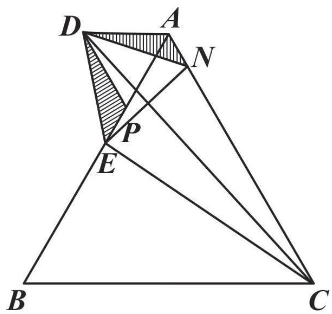

Fig. 3

Cazul al II-lea – $B \in (AE)$. Fie punctele M şi Q astfel încât $M \in (CA$, $Q \in (AB$, $(CM) \equiv (CE)$ şi $(AD) \equiv (AQ)$. Din $AE + EC = AD + AC$ rezultă $AD - AE = EC - AC$, adică $(QE) \equiv (MA)$. Triunghiul ADQ este echilateral, deci $(DQ) \equiv (AD)$ şi, cum $m(\sphericalangle DAM) = m(\sphericalangle DQA)$, rezultă că $\Delta DAM \equiv \Delta DQE$ (L.U.L.), de unde $(DM) \equiv (DE)$. Congruenţa $\Delta DMC \equiv \Delta DEC$ (L.L.L.) implică $\sphericalangle MCD \equiv \sphericalangle ECD$ (a se vedea Figura 4). Sau din $(DM) \equiv (DE)$ şi $(MC) \equiv (CE)$ rezultă că dreapta CD este mediatoarea segmentului ME, de unde avem concluzia.

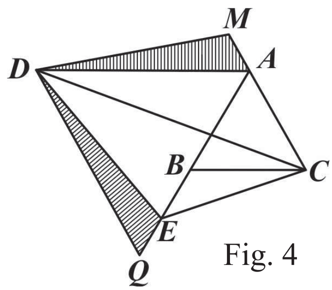

Fig. 4

Cazul al III-lea – $B \equiv E$. Concluzia rezultă imediat observând că dreapta CD este mediatoarea laturii (AB).

Soluţia a II-a. Vom analiza două cazuri: $E \in (AB)$ şi $B \in (AE$.

Cazul I – $E \in (AB)$ (Figura 5). Alegem punctul $D' \in (AB$ astfel încât $(BD') \equiv (AD)$, $B \in (AD')$. Avem $AD + AC = BD' + AC = BD' + AB = AD' = AE + ED'$ şi, folosind ipoteza, rezultă că $AE + ED' = AE + EC$, de unde $(ED') \equiv (EC)$. Apoi, $\Delta DAC \equiv \Delta D'BC$ (L.U.L.) implică $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BCD'$, de unde $m(\sphericalangle DCD') = 60^o$ şi $(CD) \equiv (CD')$ şi atunci $\Delta CDD'$ este echilateral. Din $(CD) \equiv (DD')$, $(EC) \equiv (ED')$ şi $(DE) \equiv (DE)$ rezultă că $\Delta DEC \equiv \Delta DED'$ (L.L.L.), de unde $m(\sphericalangle D'DE) = m(\sphericalangle EDC)$ şi $m(\sphericalangle DEC) = m(\sphericalangle DED')$. Însă, $m(\sphericalangle AEC) = m(\sphericalangle D'EC')$ (opuse la vârf), de unde rezultă că $m(\sphericalangle AED) = m(\sphericalangle DEC')$ – întrucât punctul D este şi pe bisectoarea unghiului BAX – adică $(ED$ este bisectoarea unghiului AEC', unde $\{C'\} = DD' \cap CE$. Urmează că punctul D este egal depărtat de dreptele AC, AB şi CE, adică se află şi pe bisectoarea unghiului ACE, de unde $(CD$ este bisectoarea unghiului ACE (se poate folosi şi faptul că bisectoarea unui unghi al unui triunghi şi bisectoarele exterioare ale celorlalte două unghiuri ale acelui triunghi sunt concurente).

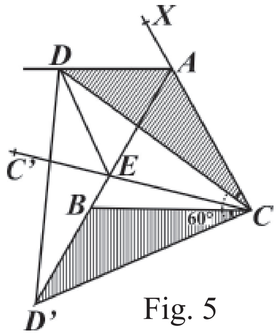

Fig. 5

Cazul al II-lea – $B \in (AE$ (Figura 6). La fel, construim $(BD') \equiv (AD)$ cu $B \in (AD')$. Egalitatea $AD + AC = AE + EC$ este echivalentă cu $AD + AB = AB + BE + EC$, adică $AD = BE + EC$, altfel scris $BD' = BE + EC$, de unde $BE + ED' = BE + EC$ şi $ED' = EC$. Pentru finalizare se consideră şirul de raţionamente de la cazul I.

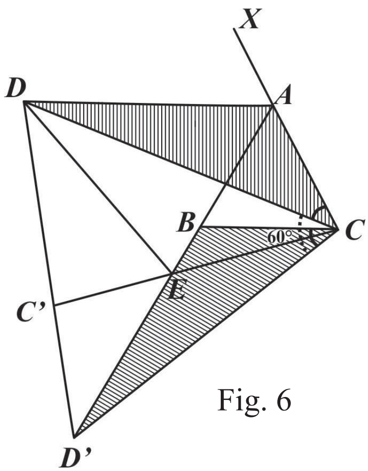

Fig. 6

Bibliografie

[1] *Suplimentul Gazetei Matematice cu prilejul celei de-a 63-a Olimpiade Naţionale de Matematică*, 2012.

[2] Artur Bălăucă, Cătălin Budeanu, Gabriel Mîrşanu, *Olimpiadele Naţionale ale României şi Republicii Moldova. Olimpiadele balcanice pentru juniori (OBMJ) 1980-2013*, Partea I, Ediţia a IX-a, Editura Taida, Iaşi, 2016.

Prof. Artur Bălăucă
Filiala Botoşani a Societăţii de Ştiinţe Matematice din România
E-mail: arturbalauca@editurataida.ro