DIDACTICA MATEMATICĂ

SUPLIMENT AL GAZETEI MATEMATICE

ANUL al V-lea **Nr. 2/2015**

Modele de lecţii

Prezenţa elementelor de teoria probabilităţilor în programa de liceu

de Eugen Păltănea

Propunem o tematică şi mai multe exemple pentru un ciclu de lecţii de teoria probabilităţilor şi statistică matematică. Discutăm strategii de prezentare la clasă a câtorva concepte fundamentale şi exemplificăm utilizarea acestora în probleme inspirate din cotidian.

Întâmplarea, posibilitatea, riscul sunt termeni care definesc în mod uzual situaţii de tip nedeterminist, incert, aleatoriu. Modelarea matematică a fenomenelor aleatoare reprezintă un domeniu fascinant al cunoaşterii. Studiul matematic al acestor fenomene are ca principal obiectiv prognoza (predicţia), cu finalitate decizională. Cu alte cuvinte, sunt analizate ştiinţific şansele de realizare a *evenimentelor* care se pot produce în urma unei *experienţe*. Astfel, matematicianul francez Abraham de Moivre intitula sugestiv *The Doctrine of Chances* prima carte din istorie dedicată *teoriei probabilităţilor*, publicată în anul 1718. *Teoria probabilităţilor* şi, respectiv, *statistica matematică* sunt două ramuri înrudite, bine conturate, ale matematicii, care au cunoscut o dezvoltare considerabilă în ultimul secol. Statistica matematică are ca obiect analiza unor date experimentale în scopul estimării *legii statistice* care guvernează apariţia acestor date. Practic, toate sferele activităţii umane beneficiază de rezultatele studiilor statistice. Teoria probabilităţilor, fundamentată teoretic în prima jumătate a secolului al XX-lea prin operele matematicienilor Andrey Nikolaevich Kolmogorov şi Richard von Mises, defineşte axiomatic şi studiază spaţiile de probabilitate, variabilelele aleatoare şi procesele stocastice. Sunt descrise cele mai importante legi (distribuţii) de probabilitate, cu evidenţierea caracteristicile lor numerice. Formalizarea matematică este bazată pe teoria mulţimilor, astfel încât operaţiile cu evenimente se transcriu, printr-o dualitate de limbaj matematic, ca operaţii cu mulţimi.

Prezenţa elementelor de statistică matematică şi probabilităţi în programa de matematică a clasei a X-a de liceu (integrate în unitatea de învăţare *Matematici financiare*) este binevenită. Ea reflectă importanţa dobândirii unor cunoştinţe de bază despre analiza matematică a unor fenomene aleatoare care ne influenţează viaţa cotidiană. Aceste cunoştinţe conduc treptat la dezvoltarea unei gândiri ,,probabiliste", fundamentală pentru studii ştiinţifice ulterioare în acest domeniu.

În expunerea de faţă ne vom referi la elementele de teoria probabilităţilor propuse elevilor clasei a X-a. Problema delicată pe care o are de soluţionat programa de matematică este prezentarea unor concepte de bază ale teoriei într-o formă particulară şi atractivă, adaptată rezolvării unor aplicaţii simple, concrete, specifice *cazului discret*. Astfel, programa rezumă discuţia la considerarea *evenimentelor aleatoare egal probabile* şi la descrierea operaţiilor cu evenimente ,,compuse" din astfel de evenimente. Această restricţie (desigur, motivată de adaptarea la nivelul de cunoştinţe ale elevilor clasei a X-a) nu deformează imaginea conceptelor generale de *familie de evenimente* (σ*-algebră* a unei mulţimi) şi *probabilitate* (*măsură* definită pe familia evenimentelor) atât timp cât profesorul reuşeşte să sugereze elevilor că abordarea în liceu a *calculului probabilităţilor* se raportează la un caz particular. Independenţa şi, respectiv, condiţionarea evenimentelor reprezintă fenomene esenţiale considerate de teoria probabilităţilor, în care intuiţia şi formalismul matematic se completează reciproc. Prin tradiţie, o serie de modele standard de spaţii de probabilitate sunt cunoscute în literatura matematică sub denumirea generică de *scheme de probabilitate*. Încadrarea unei probleme concrete într-o anumită schemă de probabilitate uşurează abordarea acesteia şi simplifică redactarea rezolvării sale. Programa prevede prezentarea *schemei lui Bernoulli* şi extinderea acesteia la *schema lui Poisson*. De menţionat importanţa cunoaşterii metodelor de numărare (combinatoricii) în calculul probabilităţilor, în particular în înţelegerea schemelor de probabilitate. În sfârşit, un concept fundamental introdus în programă este cel de *variabilă aleatoare*. Conceptul este prezentat elevilor într-o versiune particulară, în absenţa noţiunii de *borelianul mulţimii numerelor reale* şi, respectiv, a noţiunii de *funcţie reală măsurabilă*. Caracteristicile numerice ale variabilelor aleatoare discrete pot fi astfel definite fără utilizarea calculului integral. Ca o remarcă finală, vom constata că elementele de teoria probabilităţilor prezentate în liceu valorifică exemplar cunoştinţele acumulate anterior despre metodele de numărare, dar nu se rezumă la acest aspect.

Ne propunem să sugerăm în continuare formatul unei posibile lecţii recapitulative de ,,probabilităţi". După un breviar teoretic, prezentăm 5 aplicaţii recapitulative, elementare, dar instructive, cu rezolvări detaliate.

Rezumat teoretic

Cadrul matematic de bază în care se construieşte teoria probabilităţilor este *spaţiul de probabilitate*. Formal, un spaţiu de probabilitate este alcătuit dintr-o mulţime Ω (interpretată ca reprezentând *evenimentul sigur*), o familie $\mathcal{E}$ de submulţimi ale lui Ω (interpretată ca *familia evenimentelor* care pot rezulta în urma unei anumite experienţe), cu proprietăţile:

(1) $\overline{A} \in \mathcal{E}$, $\forall\ A \in \mathcal{E}$ (unde $\overline{A} := \Omega \setminus A$ este *evenimentul contrar* lui A);
(2) $A \cup B \in \mathcal{E}$, $\forall\ A, B \in \mathcal{E}$;

şi o funcţie $P : \mathcal{E} \to [0,1]$, numită *probabilitate*, care atribuie fiecărui eveniment $A \in \mathcal{E}$ o ,,probabilitate de realizare" $P(A)$, astfel ca:

(1) $P(\Omega) = 1$;
(2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $\forall\ A, B \in \mathcal{E}$, cu $A \cap B = \emptyset$ (*evenimente incompatibile*).

Realizarea simultană a evenimentelor A şi B corespunde evenimentului $A \cap B$, iar faptul că realizarea evenimentului A implică realizarea evenimentului B corespunde situaţiei $A \subset B$. Avem $P(\emptyset) = 0$, unde $\emptyset \in \mathcal{E}$ reprezintă *evenimentul imposibil*. Probabilitatea evenimentului contrar evenimentului A se calculează prin

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A).$$

În particular, dacă Ω este o mulţime finită, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$, iar $P(A) = |A|/|\Omega|$, $\forall\ A \subset \Omega$ (unde $|M|$ desemnează numărul de elemente ale mulţimii finite M), atunci suntem în cazul ,,evenimentelor elementare egal probabile" (deoarece $P(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$, $\forall\ \omega \in \Omega$, unde $n = |\Omega|$). Atunci probabilitatea unui eveniment A se interpretează prin

$$P(A) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}.$$

Evenimentele A şi B se numesc *independente* dacă

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Dacă $A \in \mathcal{E}$ are o probabilitate strict pozitivă, atunci numărul

$$P(E|A) = P(E \cap A)/P(A)$$

se numeşte probabilitatea realizării evenimentului E condiţionată de realizarea evenimentului A. În particular, dacă A şi E sunt evenimente independente, atunci $P(E|A) = P(E)$. Schemele de probabilitate reprezintă modele de bază de spaţii de probabilitate.

Schema lui Bernoulli. În cadrul unei experienţe, probabilitatea de realizare a unui anumit eveniment A este $P(A) = p \in (0,1)$. Dacă experienţa se repetă (în mod independent) de n ori, atunci probabilitatea realizării evenimentului A de exact k ori în cele n experienţe este

$$p_{k:n} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k \in \{0, 1, \cdots, n\}.$$

Schema lui Poisson. Se efectuează n experienţe independente. În cadrul experienţei ,,*i*", se urmăreşte realizarea evenimentului A_i, cu probabilitatea $P(A_i) = p_i \in (0,1)$, unde $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Atunci probabilitatea $p_{k:n}$ de realizare a exact k evenimente dintre cele urmărite în cadrul celor n experienţe este coeficientul lui x^k din dezvoltarea expresiei (polinomului)

$$(p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2) \cdots (p_n x + q_n),$$

unde $q_i = 1 - p_i \in (0,1)$ reprezintă probabilitatea evenimentului $\overline{A}_i$. Schema lui Poisson este o generalizare a schemei lui Bernoulli.

Fie un spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{E}, P)$, arbitrar, fixat. O funcţie $X : \Omega \to \mathbb{R}$, cu proprietatea $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{E}$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$, se numeşte *variabilă aleatoare.*

Variabila aleatoare X se numeşte *finită* dacă ia număr finit de valori $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Atunci $A_i := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\} \in \mathcal{E}$ şi notăm

$$p_i = P\left(A_i\right) \overset{not}{=} P\{X = x_i\} > 0,$$

pentru $i = 1, 2, \cdots, n$.

Distribuţia variabilei aleatoare X se reprezintă prin

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}.$$

Evenimentele A_i şi A_j sunt incompatibile pentru $i \neq j$. Atunci

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(\Omega) = 1.$$

Adeseori spaţiul de probabilitate pe care este definită o variabilă aleatoare este omis şi ne rezumăm la reprezentarea distribuţiei variabilei aleatoare respective. Suma şi produsul a două variabile aleatoare este de asemenea o variabilă aleatoare (pe spaţiul de probabilitate comun considerat).

Media sau valoarea aşteptată a variabilei aleatoare finite X se defineşte ca media ponderată a valorilor sale, prin:

$$E(X) := \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Pentru două variabile aleatoare X şi Y (definite pe un spaţiu comun de probabilitate) avem

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

Variabilele aleatoare finite X şi Y, având distribuţiile:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_m \end{pmatrix},$$

se numesc *independente* dacă, pentru oricare $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ şi oricare $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$ avem $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\} = p_i q_j$. În acest caz,

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Dispersia variabilei aleatoare finite X, având media

$$m = E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i,$$

se defineşte prin

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - m)^2.$$

Dispersia măsoară *abaterea medie pătratică* a valorilor variabilei X faţă de media sa.

Aplicaţii propuse

Aplicaţia 1. *Fie evenimentele A şi B, rezultate în urma unei experienţe, astfel încât $P(A) = 1/5$, $P(B) = 3/5$ şi $P(A \cap B) = 1/10$. Să se calculeze probabilităţile:*

(1) $P(A \cup B)$;
(2) $P(A \cap \overline{B})$;
(3) $P(A|B)$.

Rezolvare. Utilizăm proprietăţile funcţiei de probabilite P şi definiţia probabilităţii condiţionate.

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$.
2. $P(A \cap \overline{B}) = P(A \setminus B) = P(A \setminus (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$.
3. $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = \frac{1}{10} / \frac{3}{5} = \frac{1}{6}$. □

Aplicaţia 2. *Se aruncă un zar de trei ori. Să se determine:*

(1) *probabilitatea ca al treilea rezultat să fie suma primelor două rezultate;*
(2) *probabilitatea ca unul dintre rezultate să fie suma celorlate două;*
(3) *probabilitatea ca exact două rezultate să fie egale.*

Rezolvare.

1. Considerăm două versiuni de redactare a soluţiei.

Versiunea I (bazată pe considerarea unui spaţiu de evenimente egal probabile). Evenimentul sigur asociat experienţei este $\Omega = \{(i, j, k) : i, j, k \in \{1, 2, \cdots, 6\}\}$. Avem $|\Omega| = 6^3$ (= numărul cazurilor posibile). Notăm prin A_i evenimentul ca la aruncarea $i \in \{1, 2, 3\}$ să se obţină suma rezultatelor de la celelalte două aruncări. Avem $A_3 = \{(i, j, k) \in \Omega : k = i + j\} = \{(i, k - i, k) : k \in \{2, 3, \cdots, 6\},\ i \in \{1, \cdots, k - 1\}\}$. Atunci $|A_3| = \sum_{k=2}^{6} (k - 1) = \sum_{l=1}^{5} l = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ (= numărul cazurilor favorabile). Rezultă

$$P(A_3) = \frac{|A_3|}{|\Omega|} = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}} = \frac{15}{6^3} = \frac{5}{72}.$$

Versiunea a II-a (bazată pe considerarea variabilelor aleatoare independente). Notăm X_i variabila aleatoare care indică numărul de puncte rezultat la aruncarea $i \in \{1, 2, 3\}$. Variabilele X_1, X_2, X_3 sunt reciproc independente, având distribuţia comună: $P\{X_i = k\} = \frac{1}{6}$, $k \in \{1, 2, \cdots, 6\}$. Notăm A_3 evenimentul ca al treilea rezultat să fie suma primelor doua rezultate. Astfel, $A_3 = \{X_3 = X_1 + X_2\}$. Avem

$$P(A_3) = P\{X_3 = X_1 + X_2\} = \sum_{k=2}^{6} P\{X_3 = k,\ X_1 + X_2 = k\} =$$

$$\overset{indep}{=} \sum_{k=2}^{6} P\{X_3 = k\} \sum_{i=1}^{k-1} \left(P\{X_1 = i\} \cdot P\{X_2 = k-i\}\right) =$$

$$= \sum_{k=2}^{6} \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{6^2} = \frac{\sum\limits_{k=2}^{6}(k-1)}{6^3} = \frac{5}{72}.$$

2. Calculăm probabilitatea evenimentului $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Evident, evenimentele A_i şi A_j sunt incompatibile pentru $i \neq j$ ($A_i \cap A_j = \emptyset$). În plus, prin simetrie, $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)$. Atunci

$$P(A) = 3P(A_3) = \frac{5}{24}.$$

3. Aplicăm schema lui Bernoulli. Fie B_k evenimentul ca numărul $k \in \{1, 2, \cdots, 6\}$ să apară de exact 2 ori în trei aruncări (experienţe) independente. Cum probabilitatea apariţiei numărului k la o aruncare este $p = \frac{1}{6}$, avem

$$P(B_k) = C_3^2 p^2 (1-p) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{72}.$$

Se cere $P(B)$, unde $B = \bigcup\limits_{k=1}^{6} B_k$. Cum evenimentele $B_1, B_2, \cdots, B_6$ sunt incompatibile şi au probabilităţi egale, obţinem

$$P(B) = 6 \cdot \frac{5}{72} = \frac{5}{12}.$$

Să notăm că probabilitatea cerută poate fi calculată alternativ prin determinarea ,,numărului cazurilor favorabile" (ca în *Versiunea I* de mai sus). □

Aplicaţia 3. *În cadrul unei probe de tir, 4 sportivi execută câte o tragere asupra unei ţinte. Sportivii nimeresc ţinta cu probabilităţile* $p_1 = 0,8$, $p_2 = 0,7$, $p_3 = 0,6$ *şi respectiv* $p_4 = 0,9$. *Să se calculeze:*

(1) *probabilitatea ca ţinta să fie nimerită de exact 2 sportivi;*
(2) *probabilitatea ca ţinta să fie nimerită cel puţin o dată.*

Rezolvare. Problema se încadrează în schema lui Poisson. Fie $q_i = 1 - p_i$, $i = \overline{1,4}$.

1. Probabilitatea cerută, pe care o notăm $p_{2:4}$, este coeficientul lui x^2 din forma canonică a expresiei (polinomului)

$$(p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2)(p_3 x + q_3)(p_4 x + q_4).$$

Astfel,

$$p_{2:4} = \sum p_1 p_2 q_3 q_4 = 0,2144,$$

suma de mai sus conţinând $C_4^2 = 6$ termeni.

2. Notăm cu A evenimentul ca ţinta să fie nimerită cel puţin o dată. Avem

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - q_1 q_2 q_3 q_4 = 0,9976.$$

□

Aplicaţia 4. *O variabilă aleatoare X ia valorile 1, 2 şi 5. Să se determine distribuţia lui X ştiind că media şi dispersia sa sunt egale cu 3.*

Rezolvare. Distribuţia variabilei X este de forma

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ x & y & 1-x-y \end{pmatrix},$$

unde $x \in (0,1)$ şi $y \in (0, 1-x)$. Conform ipotezei, $E(X) = V(X) = 3$. Obţinem sistemul

$$\begin{cases} x + 2y + 5(1-x-y) = 3 \\ x(1-3)^2 + y(2-3)^2 + (1-x-y)(5-3)^2 = 3 \end{cases},$$

cu soluţia $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{3}$. Atunci

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

este distribuţia cerută. $\square$

Aplicaţia 5. *Se consideră n urne $U_1, U_2, \cdots, U_n$. Urna U_i conţine 2^i+1 bile roşii şi $2^i - 1$ bile galbene, $1 \leq i \leq n$. Se alege o urnă, ţinându-se cont de faptul că urna U_{i+1} este preferată de două ori mai mult decât urna U_i ($1 \leq i \leq n-1$), din care se extrage aleatoriu o bilă.*

(1) *Să se determine probabilitatea ca bila extrasă să fie roşie.*
(2) *Ştiind că bila extrasă este roşie, să se determine probabilitatea ca ea să provină din urna U_i, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.*

Rezolvare.

1. Fie A_i evenimentul alegerii urnei U_i şi B_i evenimentul extragerii unei bile roşii din urna (aleasă) U_i, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Conform ipotezei, $P(A_{i+1}) = 2P(A_i)$, $i = 1, \cdots, n-1$. Cum $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$, obţinem

$$P(A_i) = \frac{2^{i-1}}{2^n - 1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Apoi, ţinând cont de „compoziţia” urnelor, avem

$$P(B_i) = \frac{2^i + 1}{2^{i+1}}, \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

Notăm cu B evenimentul extragerii unei bile roşii. Constatăm că are loc reprezentarea

$$B = (A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) \cup \cdots \cup (A_n \cap B_n).$$

Evident, evenimentele A_i şi B_i sunt independente. Rezultă

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2^{i-1}}{2^n - 1} \cdot \frac{2^i + 1}{2^{i+1}} \right) = \frac{1}{4(2^n - 1)} \sum_{i=1}^{n} \left(2^i + 1\right) = \frac{2^{n+1} + n - 2}{4(2^n - 1)}. \end{aligned}$$

2. Probabilitatea ca bila roşie extrasă să provină din urna U_i este

$$P\left(A_i|B\right)=\frac{P\left(A_i\cap B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{P\left(A_i\cap B_i\right)}{P\left(B\right)}=\frac{P\left(A_i\right)P\left(B_i\right)}{P\left(B\right)}=\frac{2^i+1}{2^{n+1}+n-2}.$$

$\square$

BIBLIOGRAFIE

[1] G. Ciucu, C. Tudor. *Probabilităţi şi procese stochastice*, vol. 1 şi 2, Ed. Academiei Române, 1979.
[2] I. Cuculescu. *Teoria probabilităţilor*, Ed. All, 1998.
[3] Gh. Mihoc, N. Micu. *Teoria probabilităţilor şi statistică matematică*, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1980.
[4] ***. *Programe şcolare pentru clasa a X-a - Matematică*, OM Nr. 4598/31.08.2004, Anexa 2.

CONF. UNIV. DR. EUGEN PĂLTĂNEA
DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
UNIVERSITATEA TRANSILVANIA DIN BRAŞOV
E-mail: epaltanea@unitbv.ro