Funcţia Ackermann-Sudan

Profesorului Solomon Marcus la 90 de ani

Descriem ,,aventura" care a dus la recunoaşterea internaţională a unei descoperiri importante în teoria calculabilităţii a matematicianului român Gabriel Sudan (1899-1977).

Constanta preocupare a **Profesorului Solomon Marcus** (pe scurt, **Profesorul**) pentru valorificarea contribuţiilor matematice ale românilor, matematicieni sau ne-matematicieni, este unică. Singur sau în colaborare, **Profesorul** a editat operele matematicienilor Alexandru Froda, Miron Nicolescu, Grigore C. Moisil, Dimitrie Pompeiu şi Traian Lalescu, a publicat o extraordinară carte intitulată *Din gândirea matematică românească* (Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1975) precum şi cărţi dedicate lui Simion Stoilow şi Grigore C. Moisil, la care se adaugă numeroase articole răspândite în reviste din ţară sau străinatate.

Am fost atras de matematică în anii de şcoală elementară deşi, aparent paradoxal, matematica şcolară nu m-a interesat în mod deosebit. Interesul meu a fost stârnit de cărţi de popularizarea matematicii, multe scrise de eminenţi matematicieni străini, cărţi, care în anii 1960–70, au fost traduse în limba română din belşug şi la preţuri accesibile. În aceste cărţi am citit pentru prima oară despre infinit şi am aflat fapte extraordinare, ca de exemplu, că nu toţi infiniţii sunt egali, că există raţionamente matematice fără calcule, că anumite fapte matematice pot fi descrise ca "frumoase", că o teoremă poate fi expresia unui sentiment. Cea mai surprinzătoare "descoperire" a fost însă existenţa unor probleme matematice, numite *deschise*, care, la un anumit moment, nu sunt rezolvate (o situaţie diferită de cazul în care se demonstrează că o problemă nu are soluţie). Matematica devenea un domeniu viu, în continuă dezvoltare, cu provocări încununate de succese sau uitate in eşecuri, o viziune diametral opusă imaginii proiectate de matematica şcolara (din acea vreme).

Două cărţi de popularizare a matematicii descoperite în liceu au avut o importanţă mare pentru mine: cartea lui Gr. C. Moisil, *Elemente de logică matematică şi teoria mulţimilor* (Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1968) şi cartea *Noţiuni de analiză matematică* (Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1967) scrisă de **Profesor**. Multe lucruri importante din aceste cărţi mi-au scăpat, dar prin ele am descoperit adevărata matematică ce a devenit o pasiune pentru întreaga mea viaţă.

Am fost privilegiat să fiu îndrumat în matematică mai întâi de Moisil şi apoi de **Profesor**. În primăvara anului 1973 am pierdut în decurs de câteva săptămâni pe iubita mea mamă şi pe Moisil, care mi-a fost mentor patru ani. Ca urmare, **Profesorul** a preluat studenţii cu comunicări îndrumate de Moisil la Sesiunea Facultăţii de Matematică din acea primăvară (printre care mă număram) şi în felul acesta am aflat pentru prima oară o problemă *deschisă* reală. **Profesorul** a citat faptul curios menţionat de Moisil înainte de plecarea în Canada (din care nu s-a mai întors): matematicianul Gabriel Sudan, afirmase Moisil, este autorul unei importante construcţii matematice din teoria calculabilităţii, construcţie atribuită unanim în literatura domeniului de la acel moment matematicianului german W. Ackermann (Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, *Mathematische Annalen* 99 (1928), 118–133). Moisil n-a avut timp să dea amănunte. El nu era un expert al domeniului, şi, în consecinţă, un semn de întrebare a apărut: este afirmaţia într-adevăr corectă? Şansele ca un student să rezolve o problemă deschisă erau minime, dar problema, care părea a fi mai mult de istorie decât de matematică (fapt eronat, realizat ulterior), merita toată atenţia.

Aici trebuie să menţionez modul extraordinar al **Profesorului** de a pune astfel de probleme colaboratorilor: nu numai că vârsta sau calificările celei/celui căruia i se adresa nu aveau nici o importanţă, dar problema era prezentată ca o provocare specială pentru acea persoană, un destin căruia nu puteai să te sustragi.

Astfel, ca student în anul al treilea, am facut parte dintr-o echipă, din care mai facea parte **Profesorul** şi Dr. I. Ţevy (de la Institutul de Matematică), ce a cercetat veridicitatea afirmaţiei lui Moisil. A urmat o perioadă febrilă de muncă de aproape trei ani, care a inclus etapa de identificare a articolului – Sur le nombre transfini ω^ω, *Bulletin Math. Soc. Roumaine des Sciences* 30 (1927), 11–30 – în care Sudan prezenta construcţia sa (în termeni tehnici, o funcţie definită printr-o recurenţă încrucişată), etapa de analiză matematică a proprietăţilor funcţiei şi, în final, localizarea în timp a rezultatelor obţinute de Sudan şi Ackermann precum şi datarea articolelor care le conţin (în anii 1926, respectiv, 1927).

Participarea la acest proiect a însemnat enorm pentru mine. Lăsând la o parte bucuria şi mândria că puteam lucra într-o echipă a **Profesorului** (reamintesc, autorul unei cărţi care m-a obsedat în anii liceului), în acest mediu mi-am făcut ucenicia ca cercetător: lucrul sub presiune, în care exaltarea alterna cu dezamăgirea, perseverenţa în faţa multiplelor eşecuri, urmărirea unor drumuri divergente până la atingerea unui anumit rezultat, rigurozitatea cu care era tratată atât partea matematică cât şi cea istorică, decizia **Profesorului** de a trimite articolul la cea mai bună revistă internaţională de istoria matematicii, *Historia Mathematica*, aşteptarea înfrigurată a răspunsului revistei (confirmarea primirii lucrării, apoi referatele – ne reamintim că în anii '70 nu exista e-mail şi corespondenţa cu străinatatea era dificilă din multe puncte de vedere, tehnic şi politic), citirea "cu sufletul la gură" a referatelor recenzenţilor, dezamăgirea faţă de faptul că prioritatea lui Sudan nu putea fi demonstrată (articolul său, publicat într-o revistă românească, nu includea data primirii manuscrisului la redacţie), acceptarea soluţiei propuse de recenzenţi: *Ackermann şi Sudan au obţinut simultan şi independent rezultatele respective.*

Cei doi matematicieni împart prioritatea acestei descoperiri şi argumentele în favoarea acestei concluzii au apărut în C. Calude, S. Marcus, I. Ţevy, The first example of a recursive function which is not primitive recursive, *Historia Mathematica* 6 (1979), 330–384. Acceptarea de către comunitatea matematică a acestui fapt nu s-a făcut imediat. Au trebuit mulţi ani de eforturi matematice şi sociale pentru a se ajunge ca tratatele de specialitate să citeze corect această descoperire.

Funcţia Ackermann-Sudan (o funcţie de două argumente obţinută prin simplificarea funcţiilor originale de către R. Peter şi R. Robinson) $A\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ este definită prin următoarele trei ecuaţii:

$$A(m,n)=\begin{cases} n+1, & \text{dacă } m=0,\\ A(m-1,1), & \text{dacă } m>0 \text{ şi } n=0,\\ A(m-1,A(m,n-1)), & \text{dacă } m>0 \text{ şi } n>0\,. \end{cases}$$

Definiţia de mai sus este numită *recurenţă încrucişată*: prima ecuaţie este folosită pentru pornire, a doua ecuaţie este o iteraţie, iar a treia ecuaţie este recurenţa încrucişată propriu-zisă, cea care dă "putere" funcţiei. Folosind definiţia de mai sus putem calcula direct valorile funcţiei. De pildă,

$$A(1,1)=A(0,A(1,0))=A(0,A(0,1))=A(0,2)=3,$$

folosind, în ordine, ecuaţiile 3,2,1,1. Continuând să calculăm, obţinem $A(1,2)=4, A(1,3)=5, A(1,4)=6$ (oare $A(1,n)$ este egal cu $n+2$?), $A(2,1)=5, A(2,2)=7, A(2,3)=9, A(2,4)=11$ (oare cât este $A(2,n)$?), $A(3,1)=13, A(3,2)=29, A(4,1)=65533$ (oare cât este $A(4,2)$?). Putem recurge la un calculator vizual pentru funcţia Ackermann-Sudan (`http://www.gfredericks.com/sandbox/arith/ackermann`) pentru a continua experimentările. Pe această cale descoperim (şi demonstrăm apoi prin inducţie) relaţiile $A(3,n)=2n+3$ si

$$A(4,n)=2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}-3,\ \text{ cu } (n+3) \text{ exponenţiale suprapuse.}$$

Încercările de a găsi formule simple pentru următoarele clase de valori $A(m,n)$, unde $m=5,6,\ldots$ este fixat şi $n\geq 0$, eşuează, dar prin acest proces înţelegem mai bine funcţia A. În particular, înţelegem că A este *calculabilă* (*recursivă*, folosind o terminologie mai veche). La nivel ne-formal asta înseamnă că putem scrie un program care calculează valorile funcţiei A. S-au scris peste 100 de astfel de programe în limbaje de programare diferite, multe prezentate în Rosetta Code (`http://rosettacode.org/wiki/Ackermann function`). Ilustrăm cu două exemple. În limbajul funcţional Haskell programul este identic cu definiţia matematică:

```
A 0 n = n + 1
A m 0 = A (m-1) 1
A m n = A (m-1) (A m (n-1))
```

Programul

```
Require Import Arith.
Fixpoint A m := fix A_m n :=
  match m with
```

```
    | 0 => n + 1
    | S pm =>
      match n with
        | 0 => A pm 1
        | S pn => A pm (A_m pn)
      end
  end.
```

este scris în limbajul demonstratorului automat Coq. Pentru a calcula A printr-un program într-un limbaj nerecursiv ca C++ trebuie să simulăm recurenţa încrucişată, un exerciţiu interesant.

Funcţia Ackermann-Sudan are proprietăţi remarcabile matematice şi computaţionale. Funcţia creşte extraordinar de repede încât cele mai puternice calculatoare moderne pot calcula doar câteva valori ale sale. Din acest motiv ea a fost folosită pentru testarea eficacităţii compilatoarelor. Aceeaşi proprietate este folositoare în utilizarea funcţiei A în ierarhizarea functiilor primitiv recursive (a se vedea C. Calude. *Theories of Computational Complexity*, North-Holland, Amsterdam, 1988). În fine, o proprietate foarte specială a funcţiei este următoarea: a calcula $A(m, n)$ este foarte dificil, dar testarea predicatului $A(m, n) = p$ se poate face extrem de rapid (cf. C. Calude. Super-exponentials non-primitive recursive, but rudimentary, *Inform. Process. Lett.* 25 (1987), 311–315).

Stricta monotonie a funcţiei A implică faptul că putem defini o “inversă” a lui $A(n, n)$ în felul următor:

$$\alpha(m, n) = \min\{i \geq 1 \mid A(i, \lfloor m/n \rfloor \geq n\}.$$

Funcţia α, care creşte extrem de lent, intervine în analiza fină a complexităţii concrete a algoritmilor, de exemplu, în analiza algoritmului Chazelle de triangularizare a unui poligon (1991).

Astăzi citarea corectă a lui Sudan este vizibilă nu numai în literatura domeniului, dar şi în referinţe generale ca articolul Sudan din Wikipedia. Construcţiile lui Ackermann şi Sudan au premers teoria calculabilităţii care a fost dezvoltată abia la începutul anilor ’30. Importanţa funcţiilor lui Ackermann şi Sudan pentru noua teorie a fost constatată ulterior. Într-adevăr, funcţiile construite de Ackermann şi Sudan sunt recursive, dar ne-primitiv recursive, în fapt primele exemple de acest tip – un fenomen important în teoria calculabilităţii. Au trebuit 8 ani (cf. R. Peter. Konstruktion nichtrekursiver Funktionen, *Math. Ann.* 111, 1 (1935), 42–60), respectiv, 54 de ani (cf. C. Calude, S. Marcus, I. Ţevy. Recursive properties of Sudan function, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 25 (1980), 503–507) pentru a se demonstra că aceste funcţii au proprietăţile respective.

Simultaneitatea unor rezultate importante este un fapt frecvent în matematică, şi, în general, în ştiinţă. În cazul de faţă ea are o explicaţie simplă: Ackermann şi Sudan au fost colegi la studiile doctorale la Universitatea din Göttingen, amândoi obţinând doctoratele în teoria mulţimilor (în acelaşi an,

1925) sub conducerea celebrului matematician german David Hilbert. Teza de doctorat a lui Sudan a fost intitulată *Über die geordneten Mengen* (Despre o teorie a mulţimilor ordonate).

Construcţiile lor răspundeau unei conjecturi formulate de Hilbert în articolul programatic despre infinit (D. Hilbert. Über das Unendliche, *Math. Ann.* 95 (1925), 161–190). Doctrina lui Hilbert, sintetizată de cuvintele *Wir müssen wissen. Wir werden wissen* (Trebuie să ştim. Vom şti), formulată ca o replică la expresia latinească *Ignoramus et ignorabimus* (Nu ştim şi nu vom şti), necesită o formă matematică finitară a completitudinii matematicii.

Şase ani mai târziu, matematicianul vienez în vârstă de 25 de ani K. Gödel a demonstrat celebra teoremă de incompletitudine (Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I., *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38 (1931), 173–98) care afirma că în orice sistem axiomatic consistent, care conţine aritmetica elementară şi foloseşte o mulţime calculabil enumerabilă de axiome există *propoziţii adevărate dar nedemonstrabile* (în sistem). Matematica nu poate fi făcută numai cu calculatoare! O interpretare frecventă a acestui rezultat este că *teoretic* programul lui Hilbert a eşuat. Gödel însă n-a acceptat niciodată această concluzie!

Dezvoltăriile recente din domeniul demonstratoarelor automate precum Coq sau Isabelle – un fenomen pe care l-am putea numi "revanşa informaticii în faţa logicii matematice" – micşorează consecinţele practice ale teoremei lui Gödel, reactualizând doctrina lui Hilbert.

Teorema lui Martin-Löf din 1995 privind inexistenţa problemelor absolut nedemonstrabile în matematica constructivă şi tehnicile recente de aproximare prin mulţimi decidabile a mulţimilor nedecidabile (C. S. Calude, D. Desfontaines. Anytime algorithms for non-ending computations, *International Journal of Foundations of Computer Science*, 2015, în curs de apariţie) completează matematic rezultatele informatice citate mai sus.

Matematicienii viitorului nu prea îndepartat vor folosi demonstratoarele automate cu aceeaşi frecvenţă cu care matematicienii de azi folosesc limbajul LaTeX pentru a-şi publica lucrările.

Cum a ajuns Moisil la informaţia care a declanşat această cercetare nu vom şti probabil niciodată. Participarea mea la această "aventură" (descrisă cu amănunte de **Profesor** în cartea *Din gândirea matematică românească*) mi-a stârnit un interes deosebit pentru studiul calculabilităţii, complexităţii şi informaţiei, care a devenit subiectul meu preferat de cercetare pentru următorii 40 de ani. Deşi despărţiţi fizic de 17248 Km, cooperarea cu **Profesorul** a continuat fără întrerupere, cu aceeaşi intensitate şi bucurie. Pe masa de lucru avem mai multe proiecte, incluzând complexitatea semiotică şi neglijabilitatea în matematică şi fizică.

Ce vis poate fi mai frumos decât speranţa de a le finaliza şi de a începe alte proiecte?

Referinţe

[1] http://www.gfredericks.com/sandbox/arith/ackermann
[2] http://rosettacode.org/wiki/Ackermann_function

Prof. univ. dr. Cristian S. Calude, University of Auckland, New Zealand
E-mail: cristian@cs.auckland.ac.nz