# Soluţii comentate ale unor probleme din Gazeta Matematică

## O soluţie a problemei S:E14.270

Vom prezenta două soluţii ale unei probleme de geometrie din Suplimentul Gazetei Matematice, seria B, care folosesc teorema reciprocă a lui Menelaus, respectiv teorema lui Menelaus.

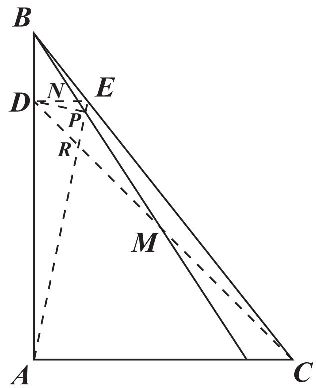
În suplimentul Gazetei Matematice, seria B, din octombrie 2014, profesorii Cosmin Manea şi Dragoş Petrică propun spre rezolvare următoarea problemă:

**S:E14.270.** *Se consideră triunghiul* $ABC$ *cu* $m(\sphericalangle A) = 90^\circ, AB > AC$, *şi punctul* $D \in (AB)$ *astfel încât* $(AD) \equiv (AC)$. *Paralela prin punctul* $D$ *la dreapta* $AC$ *intersectează dreapta* $BC$ *în punctul* $E$. *Fie punctul* $P \in (AE)$ *astfel încât* $DP \perp AE$. *Să se demonstreze că dreapta* $BP$ *trece prin mijlocul segmentului* $[DC]$.

*Soluţia I.* În cele ce urmează vom demonstra coliniaritatea punctelor $B, P$ şi $M$, mijlocul segmentului $[DC]$, folosind teorema reciprocă a lui Menelaus pentru triunghiul $REC$ cu transversala $B-P-M$. Astfel, dacă vom demonstra că

$$\frac{BE}{BC} \cdot \frac{CM}{MR} \cdot \frac{RP}{PE} = 1,$$

concluzia rezultă imediat.




Considerăm notaţiile uzuale: $BC = a$, $CA = b$ şi $AB = c$.

În triunghiul $ABC$, folosind teorema fundamentală a asemănării, cu $DE \parallel AC$, avem

$$\frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BA} = \frac{BA - DA}{BA} = \frac{BA - AC}{BA} = \frac{c-b}{c}. \qquad (*)$$

Din asemănarea triunghiurilor $ARC$ şi $ERD$ (u.u.), unde $\{R\} = AE \cap CD$, avem $\dfrac{CR}{RD} = \dfrac{AC}{DE}$, de unde $\dfrac{CR}{CD} = \dfrac{AC}{AC+DE}$. Ţinând cont că $\dfrac{AC}{DE} = \dfrac{c}{c-b}$, din (*), deducem că

$$\frac{CR}{CD} = \frac{c}{2c-b} \quad \text{iar} \quad \frac{DR}{DC} = \frac{CD - CR}{CD} = \frac{c-b}{2c-b}$$

şi atunci $DR = \dfrac{c-b}{2c-b} DC$. Rezultă imediat

$$MR = MD - RD = \frac{1}{2}CD - \frac{c-b}{2c-b}CD = \frac{b}{2(2c-b)}CD,$$

deci

$$\frac{CM}{MR} = \frac{\frac{1}{2}CD}{MR} = \frac{2c-b}{b}.$$

Conform teoremei catetei, în triunghiul $ADE$ obţinem

$$\frac{PE}{PA} = \frac{PE \cdot AE}{PA \cdot AE} = \frac{DE^2}{DA^2} = \left(\frac{DE}{AC}\right)^2 \overset{(*)}{=} \frac{(c-b)^2}{c^2}$$

şi atunci

$$\frac{PE}{EA} = \frac{(c-b)^2}{c^2 + (c-b)^2} \quad \text{iar} \quad \frac{RE}{EA} = \frac{RD}{DC} = \frac{c-b}{2c-b}$$

şi, prin împărţire, avem

$$\frac{RE}{PE} = \frac{c-b}{2c-b} \cdot \frac{c^2+(c-b)^2}{(c-b)^2},$$

de unde $\dfrac{PE}{RE} = \dfrac{(c-b)(2c-b)}{c^2+(c-b)^2}$ şi

$$\frac{PE}{PR} = \frac{(c-b)(2c-b)}{c^2+(c-b)^2-(c-b)(2c-b)} = \frac{(c-b)(2c-b)}{bc}.$$

Evaluăm acum produsul amintit iniţial:

$$\frac{BE}{BC} \cdot \frac{CM}{MR} \cdot \frac{RP}{PE} = \frac{c-b}{c} \cdot \frac{2c-b}{b} \cdot \frac{bc}{(c-b)(2c-b)} = 1,$$

deci, teorema reciprocă a lui Menelaus asigură coliniaritatea punctelor $B, P$ şi $M$. □

*Soluţia a II-a (dată de Artur Bălăucă, profesor, Iaşi).* Ne propunem să arătăm că punctul $M$, intersecţia dreptei $BP$ cu dreapta $CD$, este mijlocul segmentului $(CD)$.

Notăm cu $N$ punctul de intersecţie a dreptei $BP$ cu dreapta $DE$.

În triunghiurile $CDE$ şi $ADE$ aplicând teorema lui Menelaus cu transversalele $B-N-M$, respectiv $B-N-P$, avem relaţiile:

$$\frac{MD}{MC} \cdot \frac{BC}{BE} \cdot \frac{NE}{ND} = 1 \text{ şi } \frac{PA}{PE} \cdot \frac{NE}{ND} \cdot \frac{BD}{BA} = 1.$$

Deci

$$\frac{MD}{MC} \cdot \frac{NE}{ND} \cdot \frac{BC}{BE} = \frac{PA}{PE} \cdot \frac{NE}{ND} \cdot \frac{BD}{BA},$$

de unde

$$\frac{MD}{MC} = \frac{PA}{PE} \cdot \frac{BD}{BA} \cdot \frac{BE}{BC}. \tag{1}$$

Din asemănarea triunghiurilor $BDE$ şi $BAC$, folosind teorema fundamentală a asemănării, rezultă că

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că

$$\frac{MD}{MC} = \frac{PA}{PE} \cdot \frac{BD^2}{BA^2}. \tag{3}$$

Însă, în triunghiul $ADE$, din teorema catetei se obţine

$$\frac{PA}{PE} = \frac{AD^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DE^2}. \tag{4}$$

Din (2) şi (4) rezultă că

$$\frac{PA}{PE} = \frac{AB^2}{BD^2}. \tag{5}$$

În final, din (3) şi (5) rezultă că $\dfrac{MD}{MC} = 1$, de unde $MD = MC$. $\square$

Prof. dr. Petru Braica, Şcoala Gimnazială ,,Grigore Moisil", Satu Mare
E-mail: pbraica@yahoo.com