Revenire la un articol din Didactica Matematică nr. 1/2013

Scopul acestui articol este de a prezenta o soluţie geometrică a unei probleme cu un enunţ ,,algebric" din Gazeta Matematică. Apoi, vom vedea cum poate apărea o inegalitate interesantă, pornind de la un simplu model geometric.

1. O problemă din Gazeta Matematică care permite mai multe rezolvări interesante. În Gazeta Matematică nr. 4/2013 a apărut următoarea problemă, propusă de profesorii Cristina şi Mihai Vijeliuc din Baia Mare:

E:14486. *Fie a şi b numere reale astfel încât: $|a| \leq 1$ şi $|b| \leq 1$. Arătaţi că*

$$|a|\sqrt{1-b^2}+|b|\sqrt{1-a^2} \leq 1.$$

Problema a trezit interesul doamnei profesor Cristina Maria Militaru, care a prezentat în revista Didactica Matematică nr. 1/2013 trei soluţii diferite:

- soluţia directă, care vizează competenţa de bază a calculului cu litere şi expresii iraţionale;
- soluţia bazată pe inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz, pentru grupele de elevi care frecventează cercurile de matematică sau clasele de excelenţă;
- soluţia trigonometrică, ce poate fi abordată tot de elevii care se pregătesc suplimentar pentru concursurile de matematică.

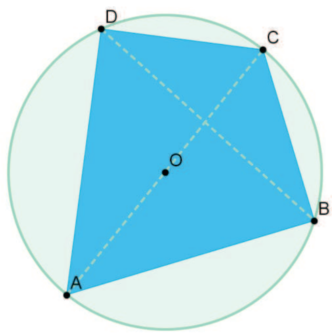
O soluţie geometrică, ingenioasă şi destul de accesibilă. Reamintim elevilor una dintre teoremele lui Claudius Ptolemeu (cca. 87-165):

Într-un patrulater inscriptibil $ABCD$, suma dintre produsele lungimilor laturilor opuse este egală cu produsul lungimilor diagonalelor, adică:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Considerăm un cerc de diametru $AC = 1$, pe care luăm punctele B şi D astfel încât $BC = |a|$ şi $CD = |b|$.

Segmentul AC fiind diametru, triunghiurile ABC şi ADC sunt dreptunghice şi avem că $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ADC) = 90°$.



Aplicând teorema lui Pitagora se obţine că $AB^2 = AC^2 - BC^2 = 1 - a^2$, deci $AB = \sqrt{1-a^2}$. Analog se ajunge la $AD = \sqrt{1-b^2}$ şi înlocuim în relaţia lui Ptolemeu:

$$|b|\sqrt{1-a^2}+|a|\sqrt{1-b^2} = AC \cdot BD.$$

Ştim că AC este 1 iar BD, fiind o coardă în cerc, nu poate fi mai mare decât diametrul cercului, deci $BD \leq 1$. Problema a fost rezolvată cu puţin efort de gândire şi fără calcule.

Condiţia de egalitate este simplă şi evidentă: pentru $BD = 1$, patrulaterul $ABCD$ este un patrulater inscriptibil cu diagonalele congruente, deci dreptunghi, şi $a^2 + b^2 = 1$.

2. O inegalitate pornind de la a doua teoremă a lui Ptolemeu, creată dintr-o joacă. În momentul în care reuşesc să înţeleagă algoritmul de rezolvare a unui tip de probleme, chiar şi elevii sunt capabili să născocească, pe acelaşi tipar, probleme noi.

Un exemplu în acest caz este următoarea problemă, propusă de un elev din clasa a IX-a. El a creat o inegalitate pornind de la a doua teoremă a lui Ptolemeu. Respectând notaţiile din desenul prezentat la problema de mai sus, teorema spune că:

Într-un patrulater inscriptibil $ABCD$ este îndeplinită relaţia:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}.$$

Dacă $AC = 1$ şi considerăm $AB = a$ şi $AD = b$, relaţia devine:

$$\frac{ab + \sqrt{1-a^2} \cdot \sqrt{1-b^2}}{a\sqrt{1-a^2} + b\sqrt{1-b^2}} = \frac{1}{BD}.$$

Dar $BD \leq 1$ şi rezultă că $\dfrac{1}{BD} \geq 1$, iar relaţia devine $\dfrac{ab + \sqrt{1-a^2} \cdot \sqrt{1-b^2}}{a\sqrt{1-a^2} + b\sqrt{1-b^2}} \geq 1$, care este echivalentă cu relaţia:

$$ab + \sqrt{1-a^2} \cdot \sqrt{1-b^2} \geq a\sqrt{1-a^2} + b\sqrt{1-b^2}.$$

Această relaţie descoperită pe cale geometrică se poate demonstra cu uşurinţă folosind raţionamente algebrice; prin ridicare la pătrat şi asocieri uzuale, reducându-se la $\left(a^2 + b^2 - 1\right)^2 \geq 0$, evident adevărată.

Egalitatea se realizează când $a^2 + b^2 = 1$, deci când patrulaterul este un dreptunghi. Frumuseţea problemei constă în multitudinea posibilităţilor de rezolvare. Elevii isteţi pot descifra tainele geometriei prin calculul algebric şi pot, de asemenea, rezolva probleme de algebră utilizând cunoştinţele de geometrie.

Mihaela Berindeanu