Soluţii comentate ale unor probleme din Gazeta Matematică

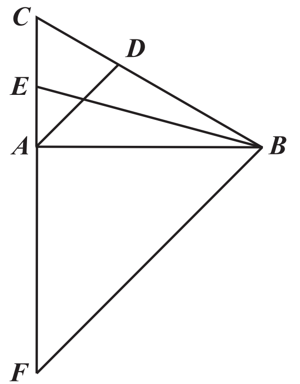
Soluţia unei probleme de geometrie

Vom prezenta o soluţie elementară pentru problema E:14530, propusă de Marin Simion în Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2013.

Problema are următorul enunţ:

Să se demonstreze că, într-un triunghi dreptunghic cu un unghi de 30^o*, lungimea bisectoarei unghiului drept este jumătate din lungimea bisectoarei unghiului de* 30^o.

Rezolvare: Fie triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle BAC) = 90^o$ şi $m(\sphericalangle ABC) = 30^o$. Fie punctul $D \in (BC)$ astfel încât semidreapta $(AD$ este bisectoarea unghiului BAC şi punctul $E \in (AC)$ astfel încât semidreapta $(BE$ este bisectoarea unghiului ABC.



Problema ne cere să arătăm că $AD = \dfrac{BE}{2}$.

Vom face următoarea construcţie ajutătoare: ducem prin punctul B paralela la dreapta AD. Notăm cu F punctul de intersecţie a acestei paralele cu dreapta AC.

Atunci, $F \in AC$ şi $BF \parallel AD$.

Din ipoteză şi din construcţia ajutătoare, avem că $m(\sphericalangle CAD) = m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle ABF) = m(\sphericalangle AFB) = 45^o$ şi $m(\sphericalangle ABE) = m(\sphericalangle CBE) = 15^o$.

Deoarece $A \in (EF)$, deducem că $m(\sphericalangle EBF) = m(\sphericalangle EBA) + m(\sphericalangle ABF) = 15^o + 45^o = 60^o$.

În triunghiul ABC avem: $m(\sphericalangle ACB) = 90^o - m(\sphericalangle ABC) = 90^o - 30^o = 60^o$.

Deoarece $E \in (CF)$, rezultă că $m(\sphericalangle FBC) = m(\sphericalangle FBE) + m(\sphericalangle EBC) = 60^o + 15^o = 75^o$.

În triunghiul AEB avem: $m(\sphericalangle AEB) = m(\sphericalangle EAB) - m(\sphericalangle ABE) = 90^o - 15^o = 75^o$.

Congruenţa $\sphericalangle CFB \equiv \sphericalangle EFB$ (1) este evidentă (este de fapt vorba de unul şi acelaşi unghi).

De asemenea, $\sphericalangle FCB \equiv \sphericalangle FBE$ (2), deoarece ambele unghiuri au 60^o.

Din ultimele două relaţii rezultă că $\Delta CFB \sim \Delta BFE$, de unde obţinem $\dfrac{CF}{BF} = \dfrac{CB}{BE}$. Aşadar, $BE = \dfrac{BC \cdot BF}{CF}$. (3)

Deoarece dreptele AD şi BF sunt paralele, avem asemănarea $\Delta CAD \sim \Delta CFB$, de unde rezultă că $\dfrac{AD}{BF} = \dfrac{AC}{CF}$ şi, atunci, $AD = \dfrac{AC \cdot BF}{CF}$. (4)

Din relaţiile (3) şi (4) deducem că $AD = BE \cdot \dfrac{AC}{BC}$. (5)

În triunghiul ABC avem: $m(\sphericalangle BAC) = 90^o$ şi $m(\sphericalangle ABC) = 30^o$, ceea ce implică $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{1}{2}$. (6)

Relaţiile (5) şi (6) ne ajută să concluzionăm că $AD = \dfrac{1}{2} \cdot BE$.

Marian Cucoaneş