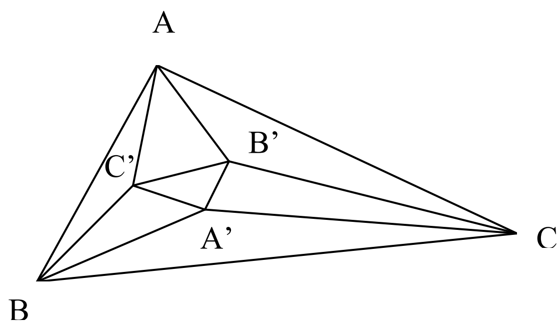
O demonstratie a teoremei lui Morley

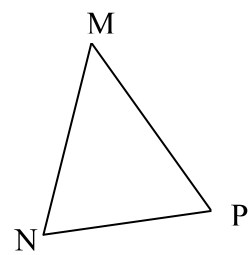
Voi face o scurta introducere inainte de a preenta teorema lui Morley

Am intalnit-o pentru prima data in celebra carte a profesorului Wladimir-Georges Boskoff, eu fiind elev in clasa a X-a de liceu in acel moment. Am avut nevoie de 20 de ani in care am depus o munca asidua de studiu in scopul gasirii unei demonstratii proprii. Abia la sfarsitul anului trecut am reusit sa ii gasesc forma in care o veti vedea in continuare.

TEOREMA LUI MORLEY. *Fie triunghiul ABC. Trisectoarele unghiurilor acestuia se intalnesc doua cate doua in punctele A', B', respectiv C'. Sa se demonstreze ca ΔA'B'C' este echilateral.*

Demonstratie:





Aplicam teorema sinusurilor in ΔA'BC si avem: $\dfrac{BC}{\sin(\frac{B+C}{3})} = \dfrac{A'B}{\sin\frac{C}{3}}$. (1)

Notam cu R raza cercu;ui circumscris triunghiului ABC. BC=2R·sin A=2R · sin 3·$\frac{A}{3}$=

=2R(3sin$\frac{A}{3}$-4sin$^3\frac{A}{3}$)=8Rsin$\frac{A}{3}$($\frac{3}{4}$-sin$^2\frac{A}{3}$)=8Rsin$\frac{A}{3}$(sin$^2\frac{\pi}{3}$- sin$^2\frac{A}{3}$)=

=8Rsin$\frac{A}{3}$ sin($\frac{B+C}{3}$) ·sin($\frac{\pi+A}{3}$). Inlocuind in (1), obtinem ca A'B=8Rsin$\frac{A}{3}$ ·sin$\frac{C}{3}$ ·sin$\frac{\pi+A}{3}$.(2) Analog demonstram ca C'B=8Rsin$\frac{A}{3}$ ·sin$\frac{C}{3}$ ·sin$\frac{\pi+C}{3}$(3).

Observam ca numerele $\frac{B}{3}$, $\frac{\pi+A}{3}$, $\frac{\pi+C}{3}$ pot fi masurile unghiurilor unui triunghi.

Fie acesta MNP, cu M=$\frac{B}{3}$,N=$\frac{\pi+C}{3}$,P=$\frac{\pi+A}{3}$.

Daca R' este raza cercului circumscris

ΔMNP$\Rightarrow$NP=2R'sin$\frac{B}{3}$,PM=2R'sin$\frac{\pi+C}{3}$, MN=2R'sin$\frac{\pi+A}{3}$.

Din relatiile (2),(3),(4) si din faptul ca M=$\frac{B}{3}$ $\Rightarrow$ ΔBA'C'~ΔMNP $\Rightarrow$ A'C'=8R $\sin\frac{A}{3}\cdot\sin\frac{B}{3}\cdot\sin\frac{C}{3}$.

Analog demonstram ca A'B'=A'C' si B'C'=A'C'. Deci ΔA'B'C' este echilateral.

In incheiere doresc sa multumesc pentru sprijinul si increderea acordate: parintilor mei, Ec. Aurelia Giugiuc si Prof. Constantin Giugiuc, distinselor doamne profesor: Elena Panaitopol, Trailescu Diana, Prajea Manuela, Duca Elena-Amelia, Buricea Anca-Valentina precum si distinsilor domni profesori: Wladimir-Georges Boskoff, Radu Gologan, Doru Stefanescu, Catalin Gherghe, Gheorghe Cainiceanu, Vasile Presneanu, Sebastian Gheorghita, Ion Nedelcu.

Autor: **Prof. Leonard-Mihai Giugiuc**,
Colegiul National Traian,
Drobeta Turnu Severin