

DETERMINAREA PUTERILOR MATRICELOR

IOANA MONICA MAȘCA

Prezentăm mai multe procedee de calcul al puterilor matricelor ilustrate prin probleme cu soluții comentate. Putem realiza selecții de metode și/sau exemple din acest material pentru lecțiile de la clasa a XI-a, pentru lecțiile recapitulative de la clasa a XII-a, precum și pentru cercurile de matematică ale elevilor.

Lucrarea de față prezintă diverse tehnici de determinare a puterilor matricelor. Metodele expuse sunt descrise, pe scurt, la nivel teoretic și sunt completate cu exemple reprezentative, utile în pregătirea elevilor.

Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, atunci pentru a putea vorbi de $A \cdot A$ trebuie să aibă sens operația de înmulțire. Aceasta este definită dacă $m = n$, adică pentru $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ținând seama de asociativitatea înmulțirii matricelor se pot defini puterile unei matrice pătratică astfel: $A^0 = I_n$, $A^1 = A$ și $A^k = A^{k-1} \cdot A$, pentru $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$.

1. Metoda inducției matematice: În contextul temei noastre, ea se aplică explicit¹ în două situații: atunci când este dată forma matricei A^n și aceasta doar trebuie verificată prin inducție matematică, sau când această formă nu este dată și ea trebuie mai întâi determinată. Prezentăm în continuare exemple pentru fiecare dintre aceste situații:

Exemplul 1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Arătați că $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3 \cdot 2^{n-1}n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Soluție: Afirmația este adevărată pentru $n = 0$; presupunând-o adevărată pentru $n \geq 0$, obținem $A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 3 \cdot 2^{n-1}n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 3 \cdot 2^n(n+1) \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$, ceea ce încheie pasul de inducție și demonstrația. $\square$

Exemplul 2. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Să se arate că există un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere complexe astfel încât $A^n = x_{n-1}A - x_{n-2}\det(A) \cdot I_2$ pentru orice $n \geq 2$ și, în plus, $x_0 = 1$, $x_1 = \text{Tr}(A)$ și $x_n = x_{n-1}\text{Tr}(A) - x_{n-2}\det(A)$ pentru orice $n \geq 2$.

¹ Ea intervine de fapt indiferent de tehnica pe care o aplicăm, dar este uneori „ascunsă” în demonstrațiile rezultatelor pe care le invocăm

Soluție: Interpretarea $A^2 = x_1 A - x_0 \det(A) \cdot I_2$ a relației lui Cayley $A^2 = \text{Tr}(A) \cdot A - \det(A) \cdot I_2$ arată că afirmația din enunț este adevărată pentru $n = 2$. Fie acum $k > 2$. Presupunem afirmația adevărată pentru orice $j \in \{2, 3, \dots, k-1\}$.

Pentru $k = 3$, din relația lui Cayley obținem $A^3 = \text{Tr}(A) \cdot A^2 - \det(A) \cdot A = \text{Tr}(A)(x_1 A - x_0 I_2) - (\det(A)) \cdot A = (x_1 \text{Tr}(A) - x_0 \det(A)) \cdot A - \text{Tr}(A) \cdot I_2 = x_2 A - x_1 I_2$.

Pentru $k > 3$, relația lui Cayley conduce la $A^k = \text{Tr}(A) \cdot A^{k-1} - \det(A) \cdot A^{k-2}$. Folosind ipoteza de inducție, obținem $A^k = (x_{k-2} \text{Tr}(A) - x_{k-3} \det(A)) \cdot A + (x_{k-3} \text{Tr}(A) - x_{k-4} \det(A)) \det(A) \cdot I_2 = x_{k-1} A + x_{k-2} I_2$. $\square$

Exemplul 3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $a \neq d$.

Determinați A^n , $n \in \mathbb{N}$.

Soluție: $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ c(a+d) & 0 & d^2 \end{pmatrix}$, iar $A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ c(a^2 + ad + d^2) & 0 & d^3 \end{pmatrix}$.

Acestea ne sugerează că $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ c \frac{d^n - a^n}{d - a} & 0 & d^n \end{pmatrix}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrăm prin inducție această afirmație: pentru $n = 0$, ea este evidentă; presupunând-o adevărată pentru $n \in \mathbb{N}$, obținem $A^{n+1} = A \cdot A^n =$

$= \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{n+1} & 0 \\ ca^n + dc \frac{d^n - a^n}{d - a} & 0 & d^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{n+1} & 0 \\ c \frac{d^{n+1} - a^{n+1}}{d - a} & 0 & d^{n+1} \end{pmatrix}$, deci afirmația este adevărată pentru $n + 1$, ceea ce încheie demonstrația. $\square$

Câteodată, între matrice se urmărește determinarea unei relații de tipul $M(a) \cdot M(b) = M(\mathcal{R}(a, b))$, unde $\mathcal{R}(a, b)$ desemnează o expresie în a și b :

Exemplul 4. Considerăm mulțimea matricelor de forma

$$M(a) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-a^2} \end{pmatrix}, \quad a \in (-1, 1).$$

Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există un unic element $a_n \in (-1, 1)$ cu proprietatea $M(a_n) = (M(a))^n$.

Soluție: Arătăm că $M(a) \cdot M(b) = M(\frac{a+b}{1+ab})$. Înlocuind b cu a , obținem $(M(a))^2 = M(\frac{2a}{1+a^2}) = M(\frac{(1+a)^2 - (1-a)^2}{(1+a)^2 + (1-a)^2})$. Probăm apoi prin inducție matematică relațiile $(M(a))^k = M(\frac{(1+a)^k - (1-a)^k}{(1+a)^k + (1-a)^k})$ și $-1 < \frac{(1+a)^k - (1-a)^k}{(1+a)^k + (1-a)^k} < 1$. $\square$

Exemplul 5. Să se arate că există polinoame α, β, γ de grade 2, 3, 4 încât pentru matricea $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \alpha(t) & \beta(t) \\ 0 & 1 & 4t & \gamma(t) \\ 0 & 0 & 1 & 6t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ să aibă loc $A(t) \cdot A(u) = A(t+u)$ și să se determine $A(t)^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Soluție: Condiția $A(t+u) = A(t) \cdot A(u)$ este echivalentă cu $\alpha(t+u) = \alpha(t) + \alpha(u) + 4tu$, $\beta(t+u) = \beta(t) + \beta(u) + t\gamma(u) + 6u\alpha(t)$ și $\gamma(t+u) = \gamma(t) + \gamma(u) + 24tu$, relații ce se verifică pentru $\alpha(x) = 2x^2 + 2x$, $\beta(x) = 4x^3 + \frac{17}{2}x^2 + 3x$ și $\gamma(x) = -3x^4 + 12x^3 + 5x$. Pe baza relației $A(t+u) = A(t) \cdot A(u)$ obținem inductiv $A(t)^n = A(nt)$. $\square$

2. Utilizarea proprietăților funcțiilor trigonometrice: Un rezultat ce se dovedește util în aplicații este următorul: Dacă $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci $A_\alpha^n = A_{n\alpha}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Exemplul 6. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. Determinați A^n , $n \in \mathbb{N}$.

Soluție: Scriem matricea sub forma $A = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = 2A_{-\frac{\pi}{3}}$. Deci, $A^n = \left(2A_{-\frac{\pi}{3}}\right)^n = 2^n A_{-\frac{\pi}{3}}^n = 2^n \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{3} & -\sin \frac{n\pi}{3} \\ \sin \frac{n\pi}{3} & \cos \frac{n\pi}{3} \end{pmatrix}$. $\square$

3. Binomul lui Newton: Utilizăm această metodă atunci când putem scrie matricea A ca sumă sau diferență a două matrice ce comută și ale căror puteri pot fi calculate ușor. Un caz particular important este cel în care una dintre matrice este I_n , iar cealaltă matrice devine nulă după un număr finit de ridicări la putere². Acest lucru se întâmplă de pildă în cazul în care cea de-a doua matrice este sub- sau supradiagonală. O astfel de matrice ridicată la orice putere de exponent cel puțin egal cu tipul său se va anula.

Exemplul 7. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați A^n , $n \in \mathbb{N}$.

² O matrice cu această proprietate se numește *nilpotentă*

Soluție: Scriem $A = I_3 + B$, unde $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Cum $I_3 B = B I_3$, putem aplica formula binomului lui Newton. Avem $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, iar B^k este matricea nulă pentru orice $k \geq 3$. Obținem așadar $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ 3n(n-1) & 3n & 0 \end{pmatrix}$.

Exemplul 8. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați A^n , $n \in \mathbb{N}$.

Soluție: Scriem $A = C - B$, unde $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ iar $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Avem $C \cdot B = B \cdot C = C$ și $C^2 = 3C$. Se demonstrează prin inducție că pentru orice $k \in \mathbb{N}$ avem: $C \cdot B^k = B^k \cdot C = C$, $C^n = 3^{n-1}C$, $B^{2k} = I_3$ și $B^{2k+1} = B$. Prin urmare, $A^n = (C - B)^n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)C + (-1)^n B^n$.

Exemplul 9. Fie $A = \begin{pmatrix} k & 2-k & -1 \\ 2-k & (k-1)^2 & k \\ -1 & k & 2-k \end{pmatrix}$. Să se arate că există două matrice $B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ astfel încât $A^n = B^n + C^n$.

Soluție: Alegem următoarele matrice: $B = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-k \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 1 & 1-k & -1 \\ 1-k & (k-1)^2 & k-1 \\ -1 & k-1 & 1 \end{pmatrix}$. Evident, $A = B + C$, iar BC este matricea nulă. Considerând $n \in \mathbb{N}^*$ și aplicând formula binomului lui Newton relației $A = B + C$ rezultă $A^n = B^n + C^n$, toți ceilalți termeni fiind nuli. $\square$

4. Metoda șirurilor recurente poate fi aplicată fie direct, fie împreună cu relația Hamilton-Cayley. Aplicarea ei directă constă în a nota³ $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ și a utiliza relația $A^{n+1} = A \cdot A^n$ pentru a stabili formule de recurență (cu interdependențe!) pentru șirurile $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$ și $(d_n)_n$. Din acestea obținem formule de recurență pentru fiecare din șiruri; pe baza acestora și a valorilor inițiale date de $A^0 = I_2$, $A^1, A^2, \dots$ se determină formulele generale ale respectivelor șiruri și, consecutiv, A^n .

³ Metoda funcționează și pentru matricele din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $n \geq 3$, considerând un număr corespunzător de șiruri.

Exemplul 10. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Determinați A^n , $n \in \mathbb{N}$.

Soluție: Notăm $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$. Din $A^{n+1} = A \cdot A^n$ deducem:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3c_n \\ c_{n+1} = 4a_n - 3c_n \\ b_{n+1} = b_n + 3d_n \\ d_{n+1} = 4b_n - 3d_n \end{cases} \quad \text{Din primele două relații obținem } c_n = -a_n + 5a_{n-1} \text{ și}$$

apoi $a_n = -2a_{n-1} + 15a_{n-2}$, $n \geq 2$. Ecuația caracteristică a șirului $(a_n)_n$ este deci $r^2 + 2r - 15 = 0$; ea are rădăcinile 3 și -5 . Prin urmare, există $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ astfel încât $a_n = \alpha \cdot 3^n + \beta \cdot (-5)^n$. De aici și din $a_0 = a_1 = 1$ obținem un sistem de ecuații cu soluția $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = \frac{1}{4}$. Prin urmare, $a_n = \frac{3^{n+1} + (-5)^n}{4}$; cum $c_n = -a_n + 5a_{n-1}$, obținem $c_n = \frac{3^{n+1} - 3 \cdot (-5)^n}{8}$.

Procedând analog, obținem $b_n = \frac{3^{n+1} - 3 \cdot (-5)^n}{8}$ și $d_n = \frac{3^{n+1} + 3 \cdot (-5)^n}{4}$. Prin urmare, $A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^{n+1} + (-5)^n}{4} & \frac{3^{n+1} - 3 \cdot (-5)^n}{8} \\ \frac{3^n - (-5)^n}{2} & \frac{3^n + 3 \cdot (-5)^n}{4} \end{pmatrix} \quad \square$

Exemplul 11. Fie $A = \begin{pmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{pmatrix}$. Determinați A^n , $n \in \mathbb{N}$.

Soluție: Punând $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$ și aplicând procedeul descris mai sus obținem $a_{n+1} = \frac{(a+b)^{n+1} + (a-b)^{n+1}}{2}$ și $b_{n+1} = \frac{(a+b)^{n+1} - (a-b)^{n+1}}{2}$. Așadar,

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2} & \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2} \\ \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2} & \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2} \end{pmatrix}. \quad \text{Dar } a + b = 1 \text{ și } a - b = \cos 2x, \text{ deci}$$

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos^n 2x & 1 - \cos^n 2x \\ 1 - \cos^n 2x & 1 + \cos^n 2x \end{pmatrix}. \quad \square$$

De obicei, aplicăm metoda șirurilor recurente dacă după calculul câtorva puteri ale lui A nu putem observa regularități care să ne permită scrierea directă a formei generale a lui A^n . Menționăm că există situații „mixte”, în care pentru unele poziții ale matricei se observă regularități, iar pentru altele nu. În această situație, vom utiliza șiruri recurente numai pentru pozițiile care mai prezintă semne de întrebare. Prezentăm în acest sens:

Exemplul 12. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Determinați A^n , $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Soluție: } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 8 \\ 0 & 9 & 32 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 26 & 72 \\ 0 & 27 & 196 \\ 0 & 0 & 125 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 80 & 464 \\ 0 & 81 & 1088 \\ 0 & 0 & 625 \end{pmatrix}.$$

Pozițiile în care regularitățile nu sunt evidente sunt $(1, 3)$ și $(2, 3)$; bănuim însă

$$\text{că } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 & a_n \\ 0 & 3^n & a_n + 5^n - 1 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}. \text{ Din } A^{n+1} = A \cdot A^n \text{ deducem } a_n =$$

$3a_{n-1} + 2(5^{n-1} - 1)$. Această relație ne conduce la $a_n = 5^n - 2 \cdot 3^n + 1$. Mai tre-

$$\text{buie doar să verificăm prin inducție că } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 & 5^n - 2 \cdot 3^n + 1 \\ 0 & 3^n & 2(5^n - 3^n) \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}.$$

□

Prezentăm acum un exemplu în care aplicăm metoda șirurilor recurente utilizând și **relația Hamilton-Cayley**:

Exemplul 13. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Determinați A^n , $n \in \mathbb{N}$.

Soluție: Avem $\text{Tr}(A) = 7$ și $\det(A) = 10$. Relația Hamilton-Cayley pentru matricea A este deci $A^2 - 7A + 10I_2 = 0$; ea ne permite să scriem și $A^n = 7A^{n-1} - 10 \cdot A^{n-2}$ pentru orice $n \geq 2$. De aici obținem imediat prin inducție existența a două șiruri $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ astfel încât $A^n = a_n A + b_n I_2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. În plus, șirurile (a_n) și (b_n) au aceeași ecuație caracteristică, și anume $r^2 - 7r + 10 = 0$. Ținând cont de relațiile $a_0 = b_1 = 0$ și $a_1 = b_0 = 1$, obținem

$$a_n = \frac{5^n - 2^n}{3}, b_n = \frac{2 \cdot 2^n - 2 \cdot 5^n}{3}, \text{ iar } A^n = a_n A + b_n I_2 = \begin{pmatrix} \frac{5^n + 2^{n+1}}{3} & \frac{2(5^n - 2^n)}{3} \\ \frac{5^n - 2^n}{3} & \frac{2 \cdot 5^n + 2^n}{3} \end{pmatrix}.$$

□

4. Folosind polinomul caracteristic ([GG], [II])

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=1,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Polinomul caracteristic* al matricei A este prin definiție $f_A = \det(XI_n - A) = X^n - (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A) \in \mathbb{C}(X)$. Rădăcinile *ecuației caracteristice* $f_A = 0$ se numesc *valorile proprii* ale matricei A .

Pentru matricele pătratice de ordinul doi și trei, polinoamele caracteristice sunt $f_A = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A)I_2$, respectiv $f_A = X^3 - \text{Tr}(A)X^2 + \text{Tr}(A^*)X - \det(A)I_3$ unde $\text{Tr}(A^*)$ este egal cu suma minorilor diagonali de ordinul doi ai matricei A .

Teorema Cayley - Hamilton Orice matrice pătratică verifică propria sa ecuație caracteristică, respectiv $f_A(A) = 0$.

Teoremă Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $m \in \mathbb{N}$, și r este restul împărțirii lui X^m la f_A atunci $A^m = r(A)$.

Observație: Calculul unei puteri A^m , $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $m \geq n$, revine la a determina un polinom matriceal de grad mai mic sau egal cu $n+1$ ai cărui coeficienți

se găsesc ușor dacă se cunosc rădăcinile ecuației caracteristice.

Pentru cazul matricelor de ordinul doi și trei, se obține $A^m = a_m A + b_m I_2$, pentru $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, respectiv $A^m = a_m A^2 + b_m A + c_m I_3$, $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Demonstrația existenței șirurilor din cele două relații se realizează prin inducție.

Exemplul 14. Să se calculeze A^n pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

Soluție: Ecuația caracteristică asociată matricei A este $x^2 - 4x + 4 = 0$ cu soluția dublă $x_1 = x_2 = 2$. Aplicând teorema împărțirii cu rest pentru polinoame, rezultă că $X^n = (X - 2)^2 g(X) + a_n X + b_n$.

Pentru $x = 2$ deducem că $2a_n + b_n = 2^n$. Derivând relația de mai sus, obținem $nX^{n-1} = (X - 2)(\dots) + a_n$.

Pentru $x = 2$, rezultă $a_n = n2^{n-1}$ și de aici $b_n = 2^n(1 - n)$. Obținem $A^n = n \cdot 2^{n-1} A + 2^n(1 - n)I_2 = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(2 - n) & n \cdot 2^{n-1} \\ -n \cdot 2^{n-1} & 2^{n-1}(2 + n) \end{pmatrix}$. $\square$

Exemplul 15. Să se calculeze A^n pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

Soluție: Ecuația caracteristică asociată matricei A este $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$ cu valorile proprii $x_1 = 1$ și $x_2 = x_3 = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Aplicând teorema împărțirii cu rest obținem $X^n = (X - 1)(X^2 - X - 1)g(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n I_3$, de unde se obține $A^n = a_n X^2 + b_n X + c_n I_3$.

Pentru $x = 1$ se obține $a_n + b_n + c_n = 1$ și din faptul că ε este o rădăcină a ecuației $x^2 - x + 1 = 0$ avem relația $a_n \varepsilon^2 + b_n \varepsilon + c_n = \varepsilon^n$, care este echivalentă cu $(a_n + b_n)\varepsilon + c_n - a_n = \varepsilon^n$, unde $\varepsilon^3 = -1$.

Avem situațiile:

1. Dacă $n = 6k$, $k \in \mathbb{N}$ se obține sistemul $\begin{cases} a_n + b_n + c_n = 1 \\ (a_n + b_n)\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} + c_n - a_n = 1, \end{cases}$ din care avem: $a_n = b_n = 0$ și $c_n = 1$, prin urmare $A^n = I_3$.

2. Dacă $n = 6k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ se obține sistemul $\begin{cases} a_n + b_n + c_n = 1 \\ c_n - a_n = 0 \\ a_n + b_n = 1, \end{cases}$

cu soluția $a_n = c_n = 0$ și $b_n = 1$ și atunci $A^n = A$.

Procedând analog, constatăm că:

3. Pentru $n = 6k + 2$, $k \in \mathbb{N}$ se obține $A^n = A^2$.

4. Pentru $n = 6k + 3$, $k \in \mathbb{N}$ avem $A^n = 2A^2 - 2A + I_3$.

5. Dacă $n = 6k + 4$, $k \in \mathbb{N}$ avem $A^n = 2A^2 - 3A + 2I_3$.

6. Pentru $n = 6k + 5$, $k \in \mathbb{N}$ avem $A^n = A^2 - 2A + 2I_3$. $\square$

5. Folosind izomorfisme ([BA])

Se mai poate calcula A^n , $n \in \mathbb{N}^*$ folosind izomorfisme între inele de matrice și inele în care calculele sunt mai puțin laborioase⁴.

Exemplul 16. Fie d un întreg liber de pătrate, $a, b \in \mathbb{Z}$ și matricea $\begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Determinați $A^n, n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție: Considerăm mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ și funcția $f : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \rightarrow \mathcal{M}$, $f(a + b\sqrt{d}) = \begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix}$. Se constată că:

1. f este bijectivă;
2. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \quad f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$;
3. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \quad f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$.

Din relația de la punctul 3 obținem $f(z^n) = f(z)^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$; această relație conduce la:

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n + C_n^2 a^{n-2} d + C_n^4 a^{n-4} d^2 + \dots & C_n^1 a^{n-1} + C_n^3 a^{n-3} d + \dots \\ C_n^1 a^{n-1} + C_n^3 a^{n-3} d + \dots & a^n + C_n^2 a^{n-2} d + C_n^4 a^{n-4} d^2 + \dots \end{pmatrix}.$$

□

Menționăm că și în spatele tehnicii de la exemplul 6 se află un izomorfism de corpuri, și anume

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad f(x + iy) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

BIBLIOGRAFIE

- [ACE] Gh. Andrei, C-tin. Caragea, V. Ene, *Algebră. Culegere de probleme pentru examene de admitere și olimpiade școlare*, Editura Scorpion 7, București, (1996).
- [BAAA] D. Brânzei, R. Brânzei, S. Anița, A. Anița, *Șiruri recurente în liceu*, Editura GIL, Zalău, (1996).
- [BR] Birant Ramazan, *Asupra ecuației matriciale $aA + bB = AB$* , Gazeta Matematică Anul CI, nr.2/1996.
- [IB] I. Băetu, *Puterile unei matrice*, Gazeta Matematică Anul XCVIII, nr.5-6/1993.
- [ICD] I.C. Drăghicescu, *O clasă particulară de matrice și o proprietate remarcabilă a acestora*, Gazeta Matematică Anul CXI, nr.4/2006.
- [II] Ion D. Ion, *Algebră*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [GG] Gh. Ghiță, *O metodă de ridicare la putere a matricelor*, Gazeta Matematică Anul CIX, nr.5-6/2004.

⁴ Ideea de izomorfism, de această dată de grupuri, este prezentă, dar nu menționată explicit, și în situațiile din exemplele 4 și 5.

-
- [MG1] M. Ganga, *Matematică. Manual pentru clasa a XI-a*, Editura MATHPRESS, Ploiești, (2006)
- [MG2] M. Ganga, *Matematică. Manual pentru clasa a XII-a Algebră*, Editura MATHPRESS, Ploiești, (2002)
- [PPL] L. Panaitopol, M.E. Panaitopol, M. Lascu, *Inducția matematică*, Editura GIL, Zalău, (1997).
- [RG] Gh.N. Rizescu, *Sumă și produs. Probleme și teme pentru clasele a XI-a și a XII-a*, Editura SIGMA PRIMEX, București, (1999).

Ioana Monica Mașca