DESPRE PROBLEME DE ADMITERE DE TIP GRILĂ

CRISTINA MARIA MILITARU

Prezentăm câteva exemple de probleme de admitere de tip grilă, care au în enunţ o listă de soluţii posibile şi la care se respectă convenţia că un răspuns şi numai unul este corect.

La unele din aceste exerciţii, candidatul nu are nevoie să facă o rezolvare propriu-zisă, deoarece se poate baza pe compararea răspunsurilor, pe anumite observaţii ce permit eliminarea celorlalte variante de răspuns sau pe calcule imediate cum ar fi verificarea soluţiilor într-o ecuaţie.

Problema 1. Valoarea integralei $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ satisface inegalitatea: a) $I < \frac{1}{e}$; b) $I < \frac{\pi}{10}$; c) $I < 0,1$; d) $I < 0$; e) $I < \frac{\pi}{4}$; f) $I < \frac{1}{3}$.

Admitere, UPB, 2010

Aici candidatul poate specula răspunsurile, chiar dacă nu ştie să facă o rezolvare a problemei. El va alege răspunsul $I < \frac{\pi}{4}$ deoarece dacă ar alege o valoare mai mică ar însemna că mai multe răspunsuri sunt corecte, lucru care nu este permis la acest tip de test.

Pentru a demonstra inegalitatea $I < \frac{\pi}{4}$ în lipsa unei grile avantajoase de răspunsuri, se arată că pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$ avem $e^{x^2} > x^2 + 1 > 0$, deci $e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2+1}$, de unde $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx < \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

Problema 2. Se consideră sistemul de ecuaţii cu coeficienţi în $\mathbb{Z}_5$:
$$\begin{cases} x + y + z = \widehat{1} \\ \widehat{2}x + \widehat{3}y + z = \widehat{1} \\ \widehat{4}x + \widehat{4}y + \widehat{3}z = \widehat{1} \end{cases}.$$
Fie $\triangle$ determinantul sistemului şi S suma soluţiilor sistemului.Atunci:
1) a.($\triangle = \widehat{0}$); b.($\triangle = \widehat{1}$); c.($\triangle = \widehat{2}$); d.($\triangle = \widehat{3}$); e.($\triangle = \widehat{4}$).
2) a.($S = \widehat{0}$); b.($S = \widehat{1}$); c.($S = \widehat{2}$); d.($S = \widehat{3}$); e.($S = \widehat{4}$).

Admitere, ASE, 1999

Bineînţeles că prima cerinţa obligă rezolvitorul să calculeze determinantul: $\triangle = \begin{vmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{3} & \widehat{1} \\ \widehat{4} & \widehat{4} & \widehat{3} \end{vmatrix} = \widehat{4}$. Pentru cea de-a doua cerinţă, observăm că prima ecuaţie a sistemului ne oferă ,,pe tavă” chiar suma cerută, deci răspunsul este $S = \widehat{1}$. Exerciţiul nu verifică aşadar dacă elevul examinat ştie cum să obţină soluţiile acestui sistem. Dacă s-ar fi cerut calculul sumei pătratelor sau a cuburilor componentelor soluţiei, atunci ar fi fost necesară determinarea acestora. În acest caz, deoarece determinantul sistemului este inversabil în $\mathbb{Z}_5$, sistemul este compatibil determinat şi se poate rezolva prin *regula lui Cramer*. Avem $\triangle^{-1} = \widehat{4}^{-1} = \widehat{4}$, $x = \triangle_x \cdot \triangle^{-1} = \widehat{1}$, $x = \triangle_y \cdot \triangle^{-1} = \widehat{2}$ şi din prima ecuaţie obţinem $z = \widehat{3}$.

Problema 3. Să se rezolve ecuaţia $\log_2 x + \log_2 2x = 3$:
a) $x = 0$; *b)* $x = -2$; *c)* $x = 1$; *d)* nu are soluţii; *e)* $x = \pm 2$; *f)* $x = 2$.

Admitere, UPB, 2004

Este suficient să se verifice numai soluţiile strict pozitive şi se obţine $x = 2$.

Problema 4. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 12^x + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x}$
Valoarea minimă a funcţiei este: *a)* 3; *b)* 0; *c)* 1; *d)* 6; *e)* 5.

Teste admitere, AFT Sibiu

Observăm că $f(0) = 3$, deci putem elimina din start variantele *d)* şi *e)*. Folosind monotonia funcţiilor exponenţiale, obţinem $f(x) > 12^x > 1$ pentru orice $x > 0$ şi $f(x) > \frac{1}{3^x} > 1$ pentru orice $x < 0$. Prin urmare, $f(x) > 1$ pentru orice număr real x şi putem elimina şi variantele *b)* şi *c)*, rămânând varianta corectă *a)*.

Problema 5. Se consideră $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4}$. Fie x_1 şi x_2 punctele în care funcţia nu este derivabilă. Atunci:
a)$(x_1 = -1, x_2 = 2)$; *b)*$(x_1 = 0, x_2 = 1)$; *c)*$(x_1 = -1, x_2 = 0)$; *d)*$(x_1 = 1, x_2 = 2)$; *e)*$(x_1 = -2, x_2 = 1)$.

Teste admitere, ASE

La această problemă rezolvitorul poate da răspunsul corect alegând valorile în care radicalul devine nul, adică $x_1 = -1, x_2 = 2$, deoarece domeniul de derivabilitate al funcţiei radical nu-l conţine pe 0. Astfel, elevul exclude celelalte variante, alege valorile corecte, dar face doar o pseudorezolvare a problemei, deoarece el nu *demonstrează* că funcţia nu este derivabilă în punctele respective.

Dacă problema nu ar fi fost de tip grilă şi ar fi cerut pur şi simplu determinarea punctelor în care funcţia nu este derivabilă, cursul firesc al rezolvării ar fi fost scrierea funcţiei sub forma $f(x) = \sqrt{(x+1)^2(x-2)^2} = |(x+1)(x-2)|$, din care se vede de ce domeniul de definiţie al funcţiei este $\mathbb{R}$. Funcţia este continuă pe $\mathbb{R}$, fiind o compunere de funcţii elementare, este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ şi se pune problema derivabilităţii în punctele $x_1 = -1$ şi $x_2 = 2$. Se calculează derivatele laterale în aceste puncte. Astfel $f'_s(-1) = -3 \neq f'_d(-1) = 3$, $f'_s(2) = -3 \neq f'_d(2) = 3$ şi de aici obţinem că funcţia nu este derivabilă în $x_1 = -1$ şi $x_2 = 2$.

Problema 6. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2} + 2, x \leq 0 \\ \sqrt{x+4}, x > 0 \end{cases}$

Care din următoarele afirmaţii este falsă:
a) f este continuă; *b)* f are proprietatea lui Darboux; *c)* f este derivabilă; *d)* f admite primitive; *e)* f este integrabilă pe $[-1, 1]$.

Teste admitere, AFT Sibiu

Alegerea corectă este *a)*, deoarece derivabilitatea funcţiei f este proprietatea care le implică pe toate celelalte din enunţ. Remarcăm că este suficient ca elevul să cunoască relaţionările între proprietăţile din enunţ, el neavând nevoie vreun moment de formula funcţiei!

Există în testele grilă şi probleme la care simpla interpretare a grilei nu ajută la ,,ghicirea" răspunsului corect. Acestea necesită rezolvări consistente:

Problema 7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{5n} \sqrt{4n^2 + kn}$ este egală cu :
a) $15 - \frac{e}{3}$; *b)* $\frac{61}{6}$; *c)* $\frac{91-3e}{6}$; *d)* $\frac{38}{3}$; *e)* $\frac{23}{2}$.

Teste admitere, AFT Sibiu

Şirul dat se poate scrie sub forma $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{5n} \sqrt{4 + \frac{k}{n}}$, care este suma Riemann asociată funcţiei $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+4}$, diviziunii $\Delta_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{5n}{n})$ şi punctelor intermediare $\xi_k = \frac{k}{n}$, unde $k \in \{1, 2, ..., 5n\}$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{5n} \sqrt{4n^2 + kn} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{5n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_0^5 \sqrt{x+4}dx = \left. \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} \right|_0^5 = \frac{38}{3}$. Varianta corectă este *d)*.

Problema 8. Să se calculeze valoarea minimă a funcţiei:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{4x^2 + 28x + 85} + \sqrt{4x^2 - 28x + 113}$
a) 20; *b)* $12\sqrt{3}$; *c)* 19; *d)* $14\sqrt{2}$; *e)* $9\sqrt{5}$; *f)* $8\sqrt{6}$.

Admitere, UPB, 2005

Vom da trei soluţii pentru aceasta problemă. Fiind o problemă de minim, cea mai naturală soluţie, dar cea mai laborioasă, se obţine cu ajutorul analizei matematice:

Soluţia I (analiză matematică) Funcţia este continuă, derivabilă şi $f'(x) = \frac{8x+28}{2\sqrt{4x^2+28x+85}} + \frac{8x-28}{2\sqrt{4x^2-28x+113}}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Din $f'(x) = 0$, obţinem $(2x+7)\sqrt{(2x-7)^2+64} = -(2x-7)\sqrt{(2x+7)^2+36}$.
Punând condiţii de existenţă, obţinem $x \in \left[-\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right]$ şi prin ridicare la pătrat rezultă că $(2x+7)^2(2x-7)^2 + 64(2x+7)^2 = (2x-7)^2(2x+7)^2 + 36(2x-7)^2$. De aici avem $64(2x+7)^2 = 36(2x-7)^2$, ceea ce este echivalent cu $8(2x+7) = \pm 6(2x-7)$. Obţinem soluţiile $x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = -\frac{49}{2}$, din care convine doar $x_1 = -\frac{1}{2}$.
Deoarece $f'(x) < 0$, pentru orice $x < -\frac{1}{2}$ şi $f'(x) > 0$, pentru orice $x > -\frac{1}{2}$, obţinem că $-\frac{1}{2}$ este punct de minim global şi minimul funcţiei este $f(-\frac{1}{2}) = 14\sqrt{2}$.

Observăm că rezolvarea este mult mai anevoioasă dacă rezolvitorul nu are inspiraţia de a scrie ca sumă de pătrate expresiile de sub radical.

Soluţia II (geometrică) Funcţia este continuă, derivabilă şi $f(x) = \sqrt{(2x-7)^2+64} + \sqrt{(2x+7)^2+36} = 2\left(\sqrt{(x-\frac{7}{2})^2+16} + \sqrt{(x+\frac{7}{2})^2+9}\right)$
Considerăm un sistem ortogonal de coordonate în plan şi punctele $A\left(\frac{7}{2}; 4\right)$, $B\left(-\frac{7}{2}; -3\right)$, $M(x, 0) \in OX$. Din formula distanţei dintre două puncte în plan, avem $AM = \sqrt{(x-\frac{7}{2})^2+16}$ şi $BM = \sqrt{(x+\frac{7}{2})^2+9}$, deci $f(x) = 2(AM+MB)$. Cum $AM + MB \geq AB$, minimul se obţine pentru $AM + MB = AB$, adică pentru A, M, B coliniare, caz posibil deoarece punctele A şi B sunt de o parte şi de alta a axei OX. Deci minimul funcţiei este $2AB = 2\sqrt{(\frac{7}{2}+\frac{7}{2})^2+(4+3)^2} = 14\sqrt{2}$ şi se obţine pentru $x = -\frac{1}{2}$.

Soluţia III (algebrică) Această soluţie presupune cunoaşterea *inegalităţii lui Minkowski*: $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2}$ pentru orice $a, b, x, y \in \mathbb{R}_+$, egalitatea obţinându-se pentru $ay = bx$.
Pentru $7 - 2x \geq 0$ şi $2x + 7 \geq 0$, deci pentru $x \in \left[-\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right]$, avem
$f(x) = \sqrt{(7-2x)^2+64} + \sqrt{(2x+7)^2+36} \geq \sqrt{(7-2x+2x+7)^2+(8+6)^2} = 14\sqrt{2}$, iar minimul se obţine pentru $8(2x+7) = 6(7-2x)$, din care rezultă că $x = -\frac{1}{2}$.
Dacă $x \geq -\frac{7}{2}$, atunci $f(x) = \sqrt{(2x-7)^2+64} + \sqrt{(2x+7)^2+36} \geq 8 + \sqrt{14^2+36} > 14\sqrt{2}$.
Dacă $x \leq -\frac{7}{2}$, atunci $f(x) = \sqrt{(7-2x)^2+64} + \sqrt{(2x+7)^2+36} \geq \sqrt{14^2+64} + 6 > 14\sqrt{2}$.

Aşadar, minimul se obţine pentru $x = -\frac{1}{2}$ şi este $14\sqrt{2}$. Observăm că $14\sqrt{2}$ nu este cea mai mică valoare propusă în grilă, fapt pentru care candidatul care ar face raţionamentul greşit de a alege cel mai mic număr aflat printre răspunsuri, fără alte verificări, ar primi în mod just zero puncte la acest exercițiu.

Ca o concluzie, am putea spune că testele grilă verifică atenția și precizia calculelor, sunt mai ușor de corectat și elimină erorile de corectură la examene. Modul în care acestea sunt concepute este foarte important dacă vrem să facem o evaluare a cunoștințelor relevantă în raport cu obiectivele propuse, în care se evită ambiguitatea, riscul ,,ghicirii" soluției sau al interpretărilor subiective.

Este binecunoscut însă faptul că un rezultat corect se poate obține uneori și printr-o rezolvare greșită sau că unii candidați au șansa de a încercui la întâmplare tocmai răspunsul corect. Din aceste motive, considerăm mai potrivite pentru o evaluare temeinică cunoștințelor de matematică testele scrise care pe lângă subiecte de tip grilă conțin și probleme la care se cere o rezolvare completă. Acestea trec peste limitările impuse de un test grilă și pot să verifice în plus felul în care elevii redactează soluția, dacă raționamentele lor sunt coerente, dacă știu să pună condițiile de existență la ecuații și inecuații sau să aplice corect o teoremă și, în general, ce abilități au în rezolvarea de probleme.

References

[1] V. Căruțașu, *Culegere de teste pentru admitere 2006*, Ed. Academiei Forțelor Terestre, Sibiu, 2006.
[2] M. Chirculescu, A. Gomolea, *Teste grilă pentru admiterea la A.S.E.*, Editura Teora, București, 2000.
[3] http://www.mathem.pub.ro/_SITE_ELEVI/s-l.htm