Probleme de coliniaritate şi concurenţă

Nimic nu este întâmplător, totul există în cadrul unei structuri/combinaţii mai mult sau mai puţin cunoscute în ansamblul ei. Geometria nu face excepţie din acest punct de vedere.

Încă din clasa a VI-a, programa de geometrie ne oferă acele ”pârghii” care ne ajută să demonstrăm sau să verificăm o anumită relaţie a unor elemente sau figuri geometrice. Un unghi alungit determinat de semidreptele $[OA$ şi $[OB$ ne asigură coliniaritatea punctelor A, O şi B. Apoi, reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf şi axioma paralelelor sunt, de asemenea, ”arme” pe care le primim pentru ”lupta” cu problemele de coliniaritate. În clasa a VII-a ”arsenalul” nostru se îmbogăţeşte cu teorema lui Menelaos şi reciproca acesteia. Liniile importante în triunghi (medianele, bisectoarele, înălţimile şi mediatoarele) sunt concurente. Iar dacă dreptele din problemă nu sunt dintre ”liniile importante”, dar produsul rapoartelor cu lungimile segmentelor determinate de ele pe laturile unui triunghi (structurat într-o anumită ordine - conform relaţiei din teorema lui Ceva) are valoarea 1, ne oferă informaţia că acestea sunt concurente. Sunt şi alte enunţuri utile în rezolvarea problemelor de concurenţă, teoreme care pot fi studiate începând cu clasa a VII-a fără dificultate (de exemplu, teorema lui Van Aubel sau lema lui Carnot).

Să reamintim câteva noţiuni utile pentru a rezolva problemele ce urmează.

- Punctele A, O şi B sunt coliniare dacă şi numai dacă $m(\sphericalangle AOB) = 180^o$.
- **Reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf.** Dacă semidreptele OA şi OB sunt opuse, iar semidreptele OC şi OD sunt situate de o parte şi de alta a dreptei AB astfel încât $m(\sphericalangle AOC) = m(\sphericalangle BOD)$, atunci punctele C, O şi D sunt coliniare.
- **Axioma paralelelor.** Printr-un punct exterior unei drepte se poate construi o dreaptă şi numai una care să fie paralelă cu dreapta iniţială.
- **Teorema lui Menelaos.** Fie un triunghi ABC şi punctele A', B', C' pe dreptele BC, CA, AB - astfel încât fie două dintre ele sunt situate pe laturi iar celălalt punct pe prelungirea celei de-a treia laturi, fie toate trei sunt situate pe prelungirile laturilor. Punctele A', B', C' sunt coliniare dacă şi numai dacă are loc relaţia $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$.

- Într-un triunghi medianele (respectiv bisectoarele, înălţimile şi mediatoarele) sunt concurente.

- **Teorema lui Ceva.** Fie un triunghi ABC şi punctele A', B', C', diferite de vârfurile triunghiului, pe laturile BC, CA, respectiv AB. Dreptele AA', BB', CC" sunt concurente dacă şi numai dacă are loc relaţia $\dfrac{A'B}{A'C} \cdot \dfrac{B'C}{B'A} \cdot$ $\cdot \dfrac{C'A}{C'B} = 1$.

Probleme rezolvate

1. Fie triunghiul ABC iar D şi E puncte pe AB, respectiv pe AC, astfel încât $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{EC}{EA}$. Fie $DF \parallel BC, F \in AC$. Arătaţi că:
a. segmentele $[AC]$ şi $[EF]$ au acelaşi mijloc;
b. mijloacele segmentelor $[AB], [AC]$ şi $[DE]$ sunt coliniare.

Soluţie. a. Fie punctul N mijlocul segmentului $[AC]$. Avem, din ipoteză, că $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{EC}{EA}$ iar $DF \parallel BC$ implică $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{AF}{FC}$. Din cele două relaţii obţinem că $\dfrac{EC}{EA} = \dfrac{AF}{FC}$, de unde (prin proporţii derivate) $\dfrac{EC}{EA + EC} = \dfrac{AF}{AF + FC}$, adică $\dfrac{EC}{AC} = \dfrac{AF}{AC}$, ceea ce implică $EC = AF$. Atunci $FN = AN - A = CN - CE = EN$, ceea ce conduce la faptul că punctul N este mijlocul lui $[EF]$.

b. Fie punctul M mijlocul segmentului AB. Atunci $MN \parallel BC \parallel DF$. (1) Dacă P este mijlocul lui $[DE]$, atunci $[PN]$ este linie mijlocie în ΔEDF, adică $PN \parallel DF$. (2) Ţinând cont de relaţiile (1), (2) şi de axioma paralelelor, deducem că dreptele PN şi MN coincid, adică punctele M, N şi P sunt coliniare.

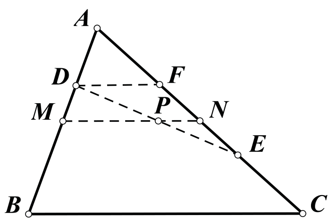

Fig. 1

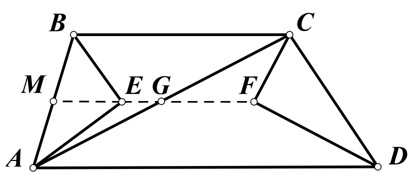

Fig. 2

2. În trapezul ABCD, cu $AD \parallel BC$, bisectoarele interioare din A şi din B se taie în punctul E, bisectoarele interioare din C şi din D se taie în punctul F. Fie punctul G mijlocul diagonalei $[AC]$. Arătaţi că punctele E, F, G sunt coliniare.

Soluţie. Unghiurile $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle B$ fiind suplementare, ΔAEB este dreptunghic în E. Considerăm M mijlocul segmentului $[AB]$. Atunci $[EM]$ este mediană în ΔAEB şi ΔMEA este isoscel cu $MA = ME$ şi $m(\sphericalangle MEA) = m(\sphericalangle MAE)$. Cum $(AE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$ obţinem că $m(\sphericalangle MEA) = m(\sphericalangle EAD)$, adică $ME \parallel AD$, ceea ce ne spune că punctul E se află pe linia mijlocie a trapezului. Analog, pentru punctul F. Iar punctul G, fiind mijlocul diagonalei AC, se află şi el pe linia mijlocie, prin urmare avem coliniaritatea punctelor E, F şi G.

3. Se dau cercurile de centre O şi O', tangente exterior în punctul T. Fie A un punct oarecare în planul cercurilor, situat în exteriorul lor. Tangenta comună exterioară a cercurilor intersectează segmentele $[AO], [AO']$ în punctele M, respectiv N. Să se arate că dreptele AT, ON şi $O'M$ sunt concurente.

Soluţie. Fie punctele R şi R', proiecţiile punctelor O, respectiv O' pe tangenta exterioară comună celor două cercuri, iar punctul P intersecţia dreptei OO' cu această tangentă. Atunci $\Delta PO'R' \sim \Delta POR$ şi de aici avem $\dfrac{PO}{PO'} = \dfrac{OR}{O'R'} = \dfrac{OT}{O'T}$. Considerând $\Delta AOO'$ cu transversala $M - N - P$, conform teoremei lui Menelaos, avem că $\dfrac{PO}{PO'} \cdot \dfrac{NO'}{NA} \cdot \dfrac{MA}{MO} = 1$. Prin urmare, $\dfrac{OT}{O'T} \cdot \dfrac{NO'}{NA} \cdot \dfrac{MA}{MO} = 1$ şi, conform teoremei lui Ceva, dreptele AT, ON şi $O'M$ sunt concurente.

4. Fie un triunghi ABC, $[AA_1], [BB_1], [CC_1]$ sunt înălţimile sale, punctele A', B', C' sunt mijloacele laturilor şi A'', B'', C'' sunt mijloacele înălţimilor sale. Să se demonstreze că dreptele $A'A'', B'B''$ şi $C'C''$ sunt concurente.

Soluţie. În $\Delta A'B'C'$ este evident că $A'' \in B'C', B'' \in A'C', C'' \in A'B'$. Se arată uşor că $\dfrac{A''C'}{A''B'} = \dfrac{A_1B}{A_1C}$ şi analoagele. Cum înălţimile $[AA_1], [BB_1], [CC_1]$ sunt concurente, avem, conform teoremei lui Ceva, că $\dfrac{A_1B}{A_1C} \cdot \dfrac{B_1C}{B_1A} \cdot \dfrac{C_1A}{C_1B} = 1$, ce implică $\dfrac{A''C'}{A''B'} \cdot \dfrac{B''A'}{B''C'} \cdot \dfrac{C''B'}{C''A'} = 1$, adică dreptele $A'A'', B'B''$ şi $C'C''$ sunt concurente.

Propunem spre rezolvare următoarele probleme:

5. Fie un triunghi oarecare ABC, în care punctul H este ortocentrul său, punctul O este centrul cercului circumscris iar puncrtul G este centrul de greutate.

Arătaţi că punctele O, G şi H sunt situate pe aceeaşi dreaptă (numită *dreapta lui Euler*) şi $HG = 2GO$.

6. Fie ABC un triunghi şi M un punct arbitrar pe cercul circumscris acestuia. Să se arate că picioarele perpendicularelor duse din punctul M pe laturile triunghiului sunt situate pe aceeaşi dreaptă (numită *dreapta lui Simson*).

7. Teorema lui Salmon. Pe un cerc se consideră punctele A, B, C şi P. Arătaţi că cercurile de diametre PA, PB, PC, se întâlnesc două câte două în trei puncte coliniare.

8. În triunghiul ABC considerăm punctul M mijlocul laturii $[BC]$, $[MP$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle AMB$ iar $[MN$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle AMC$, cu $P \in AB$ şi $N \in AC$. Arătaţi că dreptele AM, BN şi CP sunt concurente.

9. Fie ABC un triunghi oarecare şi $\mathcal{C}(O; R)$ un cerc care intersectează laturile BC, CA şi AB în punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$. Să se demonstreze că dacă dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente, atunci şi dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sunt concurente.

Bibliografie

[1]. Dorin Andrica, Csaba Varga, Daniel Văcăreţu, *Teme de geometrie*, Editura Promedia Plus, Cluj-Napoca, 1997;

[2]. Dan Brânzei, Eugen Onofraş, Sebastian Aniţa, Gheorghe Isvoranu, *Bazele raţionamentului geometric*, Editura Academiei, Bucureşti, 1983.

Maria Monica Sas