CUM AM REZOLVAT O PROBLEMĂ

LAURENŢIU PANAITOPOL

De curând mi-a căzut în mână o culegere de probleme. Răsfoind-o, am întâlnit o problemă care făcuse obiectul unui examen de admitere la Institutul Politehnic [1, p.207]; mi-a atras atenţia fiindcă era dintr-o categorie de probleme care de multe ori primesc de la elevi soluţii incomplete.

Văzusem, nu o dată, cum identitatea $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$ fusese ,,demonstrată" astfel:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1,$$

deci $\quad \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}=\operatorname{arctg}1=\dfrac{\pi}{4}.$

Evident, demonstraţia nu este terminată, pentru că din $\operatorname{tg}\alpha=a$ s-a tras concluzia $\alpha=\operatorname{arctg}a$ fără a se demonstra în prealabil că $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Continuarea demonstraţiei nu este foarte complicată: din inegalităţile

$$0<\frac{1}{2}<1 \text{ şi } 0<\frac{1}{3}<1,$$

ţinându-se seama că funcţia arctg este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, se trage concluzia că

$$0<\operatorname{arctg}\frac{1}{2}<\frac{\pi}{4} \text{ şi } 0<\operatorname{arctg}\frac{1}{3}<\frac{\pi}{4},$$

de unde

$$0<\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}<\frac{\pi}{2}.$$

Din aceste inegalităţi şi din relaţia

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)=1$$

rezultă într-adevăr că

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

Să ne oprim la problema de concurs de care vorbeam:

Fie $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *un polinom cu coeficienţii* a, b, c, d *numere reale în progresie aritmetică şi* $d \neq 0$. *În ipoteza că rădăcinile* x_1, x_2, x_3 *ale acestui polinom sunt toate reale, să se arate că:*

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x_1} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x_2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x_3} = -\frac{\pi}{4}.$$

Redau în continuare ,,soluţia" existentă în culegere:
Fie $S = \operatorname{arctg}\frac{1}{x_1} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x_2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x_3}$.
Notând $\operatorname{arctg}\frac{1}{x_i} = y_i$ $\left(\text{deci } \frac{1}{x_i} = \operatorname{tg} y_i\right)$, $i = 1, 2, 3$, obţinem:

$$\operatorname{tg} S = \operatorname{tg}(y_1 + y_2 + y_3) = \frac{\operatorname{tg} y_1 + \operatorname{tg} y_2 + \operatorname{tg} y_3 - \operatorname{tg} y_1 \operatorname{tg} y_2 \operatorname{tg} y_3}{1 - \operatorname{tg} y_1 \operatorname{tg} y_2 - \operatorname{tg} y_2 \operatorname{tg} y_3 - \operatorname{tg} y_3 \operatorname{tg} y_1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_1 x_2 x_3}}{1 - \frac{1}{x_1 x_2} - \frac{1}{x_2 x_3} - \frac{1}{x_3 x_1}} = \frac{x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 - 1}{x_1 x_2 x_3 - (x_1 + x_2 + x_3)}.$$

Folosind relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi avem:

$$\operatorname{tg} S = \frac{\frac{c}{a} - 1}{-\frac{d}{a} + \frac{b}{a}} = \frac{c - a}{b - d},$$

iar pentru că a, b, c, d sunt în progresie aritmetică, $c - a = d - b$, deci $\operatorname{tg} S = -1$. Obţinem astfel $S = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

N-aveam nicio îndoială că se obţine $S = -\frac{\pi}{4}$, dar aveam certitudinea că încă n-am obţinut! Trebuia să mai arăt că $S \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Urma să plasez rădăcinile x_1, x_2, x_3 în nişte intervale (aşa cum plasasem la exerciţiul precedent pe $\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{3}$ între 0 şi 1), iar apoi, folosind faptul că funcţia arctg este strict crescătoare, să demonstrez în sfârşit că $S \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Fireşte, stabilirea intervalelor în care se găsesc rădăcinile unei ecuaţii cu parametri ne conduce la ideea întocmirii şirului lui Rolle.
Dacă r este raţia progresiei, vom avea $b = a+r$, $c = a+2r$ şi $d = a+3r$, adică ecuaţia devine:

$$a(x^3 + x^2 + x + 1) + r(x^2 + 2x + 3) = 0.$$

Cum $a \neq 0$ (pentru că ecuaţia *trebuie* să fie de gradul III) şi $x^2+2x+3 \neq 0$, obţinem ecuaţia echivalentă:

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 3} + \frac{r}{a} = 0.$$

Notăm $\frac{r}{a} = \alpha$ şi $g(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 3} + \alpha$ şi avem:

$$g'(x) = \frac{x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 4x + 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} = \frac{(x+1)^4 + 6x^2}{(x^2 + 2x + 3)^2} > 0.$$

Cum derivata nu are rădăcini reale şi $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$, rezultă că dacă o ecuaţie de gradul III are coeficienţii în progresie aritmetică, atunci ea are o singură rădăcină reală. Surpriză! Am recitit problema, am refăcut calculele: acelaşi rezultat. Aşadar, problema era greşită. Lucrasem într-un sistem de axiome incompatibile. Demonstrasem o proprietate a celor trei rădăcini reale din care de fapt nu exista decât una.

Mi-am amintit apoi sfatul profesorului ,,tradiţional" reprodus de Pólya: ,,După ce vă veţi convinge că o teoremă este adevărată, treceţi la demonstrarea ei". Cred însă că nu numai candidaţii la un examen trebuie să fie convinşi că teorema pe care o au de demonstrat este adevărată.

References

[1] M. Roşculeţ, O. Popescu, *Probleme de analiză matematică pentru admiterea în învăţământul superior*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.