O lecţie de combinatorică. Dubla numărare

Cătălin Gherghe

Materialul de faţă este pe de o parte, o propunere de lecţie de recapitulare şi de fixare a principalelor noţiuni de combinatorică învăţate în clasă iar pe de altă parte se poate constitui într-un antrenament al elevilor ce vor să participe la olimpiade şolare şi concursuri de matematică, metoda folosită pentru rezolvarea tuturor exerciţiilor fiind cea a dublei numărări. Caracterul concret al majorităţii problemelor ar putea face o astfel de lecţie mult mai atrăgătoare, elevii putând fi "păcăliţi" prin rezolvarea problemei concrete în găsirea enunţului pur matematic echivalent.

O astfel de lecţie ar trebui să înceapă prin a reaminti elevilor câteva definiţii şi proprietăţi deja învăţate:

- o permutare a mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ este o rearanjare a acesteia. Numărul permutărilor unei mulţimi având n elemente este $P_n = n!$.
- numărul modurilor în care putem alege o submulţime cu k elemente dintr-o mulţime cu n elemente este $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ (combinări de n obiecte luate câte k).
- numărul total de submulţimi ale unei mulţimi cu n elemente este $2^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i$.

Uneori există mai multe căi de a număra o cantitate. Numărând-o în două moduri (folosind adică numărare dublă), putem obţine acelaşi lucru în forme diferite. Putem astfel ajunge la identităţi şi inegalităţi interesante.

1. Să se interpreteze identităţile de mai jos din punct de vedere combinatorial, folosind dubla numărare:

a. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

b. $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$.

c. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} = C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$.

Pentru pregătirea demonstrării identităţilor combinatorii de mai sus, elevii ar putea fi "antrenaţi" prin câteva întrebări cu răspuns imediat. De exemplu:

- în câte moduri pot fi alese echipe de câte 4 membri dintr-un lot de 10 sportivi? (răspuns: C_{10}^4)

- în câte moduri pot fi alese echipe de câte 5 membri dintr-un lot de 13 sportivi dacă se desemnează şi un căpitan de echipă? (răspuns: $5 \cdot C_{13}^5$)

- în câte moduri pot fi alese echipe de câte opt băieţi şi două fete dintr-un lot de 10 băieţi şi 10 fete? (răspuns: $C_{10}^8 \cdot C_{10}^2$)

- dintr-o mulţime de 17 concurenţi în câte moduri pot fi desemnaţi 8 câştigători? Dar 9 învinşi? (răspuns: $C_{17}^8 = C_{17}^9$)

În funcţie de identităţile ce urmează a fi rezolvate, profesorul ar putea să aleagă şi alte ,,mici" exerciţii de tipul celor de mai sus.

Generalizând ultimul exemplu de mai sus, să observăm că pentru orice numere naturale n şi k astfel încât $n \geq k \geq 0$ avem $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$. Evident, această identitate ar putea fi demonstrată algebric, utilizând formula combinărilor, dar un argument combinatorial, folosind dubla numărare, este mult mai potrivit. A alege k câştigători dintr-o mulţime de n concurenţi este echivalent cu a alege $n-k$ învinşi din aceeaşi mulţime. Există C_n^k posibilităţi pentru prima alegere şi C_n^{n-k} pentru cea de-a doua. Aşsadar, cele două cantităţi trebuie să fie egale.

Argumentul combinatorial va face ca elevii să înţeleagă *de ce* identitatea este adevărată pe când argumentul algebric le arată doar că aceasta este adevărată.

Odată ce elevii au fost deja "încălziţi" se poate trece la demonstrarea identităţilor propuse. Evident, din punct de vedere metodic, aceste identităţi, ar putea fi enunţate abia acum pentru a nu "speria" elevii prea tare.

a. Evident se poate justifica identitatea în cazul general, dar alegând valori concrete pentru n şi k ar putea fi mult mai uşor pentru elevi. Să luăm de exemplu $n = 15$ şi $k = 9$. Profesorul poate propune elevilor să încerce să numere câte echipe de câte 9 membri se pot forma dintr-un lot de 15 sportivi. Pe de o parte, numărul modurilor de a alege echipe cu 9 sportivi dintr-o mulţime de 15 oameni este C_{15}^9. Interesant este să vedem cum mai putem număra câte astfel de echipe există. Fixăm unul dintre sportivi (să zicem Alex) din lot. Mulţimea chipelor formate din 9 sportivi se împarte în două submulţimi disjuncte: cele care-l conţin pe Alex şi cele care nu. Câte echipe care-l includ pe Alex se pot forma? Deoarece Alex a fost deja ales completăm echipa cu încă 8 sportivi din cei 14 rămaşi, adică sunt C_{14}^8 echipe ce îl conţin pe Alex. Pentru a număra restul de echipe, trebuie să alegem 9 sportivi, dar din nou din 14 deoarece Alex a fost exclus, adică avem C_{14}^9 astfel de echipe. Numărul total de echipe este suma $C_{14}^8 + C_{14}^9$, care este chiar C_{15}^9.

b. Pentru interpretarea acestei identităţi, să ne imaginăm următorul scenariu. Dintr-o mulţime de n sportivi vrem să formăm echipe, fiecare având un căpitan de echipă (se acceptă echipe formate dintr-un singur sportiv acesta fiind evident chiar căpitanul). Să calculăm în două moduri numărul de echipe având un căpitan ales.

Pe de o parte, din n sportivi putem alege în n moduri un căpitan. La fiecare dintre aceştia se adaugă ceilalţi membri ai echipei (în număr de k cu $0 \leq k \leq n-1$). Adică, pentru fiecare căpitan ales, putem forma 2^{n-1} echipe (de ce?). Aşadar putem forma $n2^{n-1}$ echipe cu un căpitan ales.

Pe de altă parte pentru fiecare k, $1 \leq k \leq n$, putem alege o echipă formată din k sportivi în C_n^k moduri şi deci există kC_n^k echipe formate din k sportivi având un căpitan de echipă ales. Făcând sumarea obţinem exact suma din membrul stâng al identităţii.

c. Presupunem că dintr-o mulţime de n băieţi şi n fete, vrem să alegem o echipă formată din n persoane. Pe de o parte, acest număr este chiar termenul din mijloc, adică C_{2n}^n. Pe de altă parte, să facem calculul în funcţie de numărul de băieţi (sau fete) din fiecare echipă. Pentru orice k, $0 \leq k \leq n$, putem alege k băieţi în C_n^k moduri iar celelalte $n-k$ locuri vor fi completate cu fete în C_n^{n-k}

moduri. Astfel, numărul echipelor având k băieţi şi $n-k$ fete este $C_n^k C_n^{n-k}$. Făcând acum sumarea se obţine membrul stâng al identităţii. Pentru termenul din dreapta se foloseşte formula combinărilor complementare $C_n^k = C_n^{n-k}$. ■

Identităţile de mai înainte pot fi evident demonstrate prin diverse metode (algebrice sau chiar folosind instrumente de analiză matematică), dar metoda prezentată ar putea fi una mult mai atractivă pentru elevi. Aceştia pot fi încurajaţi să descopere ce probleme de numărare se află în spatele altor identităţi combinatorii şi să încerce să le demonstreze.

2. Fie n puncte în plan astfel încât oricare trei sunt necoliniare. Să se arate că numărul triunghiurilor de arie egală cu 1, având vârfurile în mulţimea dată, nu este mai mare decât $\frac{2}{3}(n^2-n)$.

Soluţie Notăm cu k numărul triunghiurilor de arie 1 cu vârfurile din cele n puncte. Ne uităm acum la perechile (l, Δ), unde l este latură a triunghiului Δ iar aria triughiului Δ este egală cu 1. Fie t numărul acestor perechi. Pe de o parte este clar că $3k = t$.

Pe de altă parte, pentru fiecare latură fixată AB (A şi B puncte în mulţimea dată), există cel mult patru triunghiuri de arie 1 având una din laturi AB şi un al treilea vârf printre punctele date (deoarece aceste puncte se află la aceeaşi distanţă de dreapta suport a lui l şi nu există 3 puncte coliniare). Rezultă atunci că $t \leq 4C_n^2$.

Combinând cele două relaţii, se obţine $3k = t \leq 4\frac{n(n-1)}{2}$, care reprezintă chiar inegalitatea din enunţ. ■

După rezolvarea acestei probleme ieşite din tipare, este momentul să dăm elevilor câteva sfaturi privind utilizarea dublei numărari în rezolvarea unor probleme:

- **Să caute numărarea cea mai potrivită.** De exemplu, în exerciţiul precedent elementele ce se pretează a fi numărate sunt punctele, laturile şi triunghiurile. În cazul nostru, am ales laturile deoarece este mai uşor să găsim o margine pentru numărul triunghiurilor ce conţin o latură dată. In final am ales să numărăm laturi şi triunghiuri.

- **Să numere (dacă este mai avantajos) perechi sau chiar triplete ordonate de obiecte specifice problemei.** De exemplu, am numărat mai sus perechi de forma (latură, triunghi).

- **Dacă problema cere să se calculeze o anumită cantitate, să caute metode de a număra în două moduri o altă cantitate, astfel încât una din numărători conţine cantitatea cerută, iar cealaltă nu.** In exemplul nostru egalitatea ce conţine cantitatea k cerută este evident $3k = t$.

In exemplul de mai sus am numărat în două moduri perechi de tipul (latură, triunghi). Exemplul următor ne va arăta că este util uneori să numărăm anumite triplete ordonate

Exemplul 3 Intr-o şcoală sunt 2011 de băieţi şi 2011 de fete. Niciun elev nu poate participa la mai mult de 100 de cluburi şi oricare doi elevi de sex opus participă împreună la cel puţin un club. Să se arate că există un club cu cel puţin 11 băieţi şi cel puţin 11 fete.

Soluţie Informaţia despre perechile (băiat, fată) ne sugerează să considerăm mulţimea S a tripletelor (b, f, c) unde b este baiat, f este fată, iar c este un club la care participă atât b cât şi f. Elementele mulţimii S vor fi numărate în două moduri diferite.

Ştim din ipoteză că pentru orice pereche (b, f) cei doi vor participa la cel puţin un club împreună, şi cum există 2011^2 perechi, rezultă card $S \geq 2011^2$.

Presupunem acum că nu există cluburi având în acelaşi timp cel puţin 11 băieţi şi cel puţin 11 fete. Mulţimea S se partiţionează acum în mulţimea X a tripletelor în care clubul are cel mult 10 băieţi şi mulţimea Y a tripletelor pentru care clubul are cel puţin 11 băieţi şi deci are cel mult 10 fete (datorită presupunerii făcute). Deoarece orice elev poate participa la cel mult 100 de cluburi şi deoarece sunt 2011 fete, rezultă că numărul perechilor (f, c) cu f în c este cel mult 2011×100 şi deci cardinalul lui X este cel mult $2011 \times 100 \times 10$. Analog, cardinalul mulţimii Y este cel mult $2011 \times 100 \times 10$. In final obţinem

$$2011^2 \leq \text{card } S = \text{card } X + \text{card } Y \leq 2011 \times 2000,$$

care este evident o contradicţie. ■

Lecţia se poate încheia cu o problemă mai dificilă ce se rezolvă folosind principiul dublei numărări sau prin exemplificarea unei aplicări a metodei la probleme ce nu sunt neapărat de numărare. Folosind dubla numărare într-un mod cu totul neaşteptat se poate da o demonstraţie foarte frumoasă a următorului rezultat de algebră.

Mica Teoremă a lui Fermat Dacă a este un număr natural nenul iar p este un număr prim, atunci $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Demonstraţie. Li se va sugera mai întâi elevilor să caute o formă echivalentă a congruenţei ce trebuie demonstrată. Evident, este suficient să arătăm că $a^p - a$ este un multiplu de p. Apariţia termenului a^p ne sugerează să considerăm următoarea problemă de numărare. Ne vom uita la mulţimea tuturor cuvintelor de lungime p cu litere dintr-un alfabet având a simboluri diferite, formate cu cel puţin două litere. Pe de o parte, cardinalul acestei mulţimi este evident $a^p - a$.

Pe de altă parte, putem împărţi mulţimea acestor cuvinte în clase. Două cuvinte sunt în aceeaşi clasă dacă unul este obţinut din celălalt prin permutări circulare succesive. Să remarcăm că toate cele p permutate circulare ale unui cuvânt sunt distincte (deoarece p este număr prim, un cuvânt nu poate fi compus din subcuvinte identice de lungime mai mare ca 1). Astfel, toate clasele au exact p cuvinte şi deci cardinalul mulţimii cuvintelor este multiplu de p.

Pentru ca elevii să înţeleagă mai bine acest raţionament, este indicat să se se considere cazuri concrete. De exemplu când alfabetul este format din 2 simboluri iar cuvintele sunt de lungime 5.

Bibliografie

1. Law Ka Ho, Leung Tat Wing, Li Kin Yin, Double Counting, Mathematical Excalibur, vol. 3, Nr. 4, 2008.

2. I.Tomescu, Probleme de combinatorică şi teoria grafurilor, Ed. Didactică şi pedagogică, 1981

3. Paul Zeitz, The Art and Craft of Problem Solving, Wiley and sons, 2007