
EDUCAȚIA MATEMATICĂ. ANALIZĂ ȘI DIRECȚII DE ACȚIUNE

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

1. CINE SUNTEM?

Suntem o echipă de profesori implicați activ în educația matematică, membri ai Societății de Științe Matematice din România.

Societatea de Științe Matematice din România (SSMR) este o organizație profesională cu o activitate remarcabilă, de peste un secol, fiind continuatoarea Societății Gazeta Matematică (SGM). Înființată prin decret regal, în urma unei legi votate de parlament în 1910, SGM avea ca scopuri „răspândirea gustului pentru studiul științelor matematice și îndrumarea cercetărilor originale relative la această ramură de știință” și ca principală activitate editarea revistei Gazeta Matematică, ce apare fără întreruperi din 1895 și se adresează deopotrivă elevilor, profesorilor și iubitorilor de matematică.

Principalele scopuri ale SSMR sunt similare cu cele inițiale Societății Gazeta Matematică, dar adaugă o componentă nouă: „militarea pentru recunoașterea rolului matematicii în societatea românească”.

SSMR editează și distribuie la nivel național și internațional publicații valoroase, precum Gazeta Matematică și revista Bulletin Mathématique, în care apar cercetări originale avansate. Este acreditată ca furnizor de formare și certificare de specialitate. De asemenea, este implicată în proiecte de succes în domeniul educației matematice și prezintă un înalt grad de expertiză, materializat în contribuția științifică la conferințe, olimpiade și concursuri naționale și internaționale importante.

Site-uri: ssmr.ro // magazin.ssmr.ro // gazetamatematica.ro
[//facebook.com/ssmr.ro/bulletin.ssmr.ro/didactica.ssmr.ro](https://facebook.com/ssmr.ro/bulletin.ssmr.ro/didactica.ssmr.ro)

2. CE NE-AM PROPUȘ?

Scopul este de a defini poziția Societății de Științe Matematice privind direcțiile concrete de acțiune în educația matematică și curriculumul în învățământul preuniversitar.

Propunerea noastră include următoarele:

- un studiu documentat despre principalele domenii cheie din educația și curriculumul matematic la nivel internațional;
- o analiză de tip diagnoză asupra situației educației și curriculumului la matematică din România;
- un set de direcții concrete de acțiune care să ducă la îmbunătățirea și reformarea educației și a curriculumului matematic;
- modele de lecții de matematică cu metode de predare moderne și inovative (vezi anexa 4.)

3. CE ANUME NE MOTIVEAZĂ?

Acest proiect marchează unul din scopurile principale ale activității Societății de Științe Matematice din România, legate de modificarea percepției sociale asupra rolului educației matematice în societatea noastră.

4. CUI NE ADRESĂM?

Ne adresăm tuturor celor interesați de calitatea educației: decidenți în domeniul educației, designeri și practicieni.

În atenția noastră s-au aflat: profesorii de matematică, specialiștii în proiectare curriculară în toate domeniile incluse în curriculum (programele școlare), autorii de manuale/articole și de resurse digitale, colaboratorii Societății de Științe Matematice din România și, mai ales, elevii.

5. CARE SUNT REZULTATELE?

În cadrul proiectului au fost realizate două studii complementare în raport cu obiectivul final. Acestea sunt rezultatul unui efort colaborativ de documentare și cercetare, dar și al analizei pe care o poate legitima experiența internațională a autorilor.

Primul studiu redă sintetic aspectele cele mai importante din educația matematică din S.U.A., Germania, Franța, Anglia, Australia, Japonia și Coreea de Sud. Cel de-al doilea realizează diagnoza educației matematice din România, o analiză care integrează date din surse multiple, conform metodologiei cercetării educaționale de tip evaluativ.

Am analizat următoarele aspecte: *rolul educației matematice; curriculumul matematic; practicile de instruire; evaluarea performanțelor; formarea profesorilor; motivarea în învățarea matematicii; utilizarea tehnologiei.*

1. TENDINȚE INTERNAȚIONALE ÎN EDUCAȚIA MATEMATICĂ

Scop: descrierea unor experiențe, prin care anumite țări (S.U.A., Germania, Franța, Anglia, Australia, Japonia și Coreea de Sud) s-au evidențiat în unele ierarhii internaționale.

Studiul are la bază documentarea, precum și analiza cercetărilor educaționale realizate la nivel internațional în educația matematică (**vezi anexa 1**).

CONCLUZII ALE STUDIULUI

I. Rolul educației matematice

Rolul educației matematice s-a schimbat în ultimele decenii, matematica școlară devenind un domeniu cu implicații sociale importante. Cultura matematică este considerată o cale de acces către cariere de succes. În sistemele de educație evocate, se conștientizează faptul că matematica școlară are, pentru cei mai mulți, o utilitate socială, și pentru cei mai puțini, o valoare academică. Educația matematică este corelată cu educația științifică și dezvoltarea tehnologică, obiective importante ale sistemelor de educație analizate.

II. Curriculumul matematic

Curriculumul matematic, deși orientat de repere normative, are o dinamică determinată de cerințe actuale, uneori urgente. Educația matematică încearcă să reflecte natura inter/ transdisciplinară a învățării. Eforturi remarcabile sunt orientate către reactualizarea conținuturilor, vizând, în special, caracterul aplicativ. Premisa aplicării matematicii este dată de dezvoltarea gândirii logice, deci de fundamente

cognitive. O astfel de abordare este încurajată în anii de educație obligatorie. Conținutul educațional este selectat în așa fel încât să permită conexiunea între discipline, precum și aplicarea cunoștințelor.

III. Practicile de instruire

Cercetările dedicate eficienței practicilor de instruire sunt frecvent realizate în aceste țări, ca argumente pentru inițierea anumitor schimbări în programele de studiu. Din aceste investigații reiese faptul că predarea tradițională continuă să fie preponderentă, chiar dacă profesorii recunosc că strategiile noi de învățare au o valoare pedagogică remarcabilă.

IV. Evaluarea performanțelor

Testările standardizate au modificat fundamental modul de instruire. În studiile realizate, profesorii recunosc că există riscul ca testarea să vizeze doar rezultatele învățării conform standardelor de evaluare și, mult mai puțin, nevoile de dezvoltare ale elevului. Aici, testările internaționale sunt urmate de studii comparative și ierarhizări, dar și de analize la nivel național pentru a se identifica sursa reușitei/nereușitei. Testările naționale au rolul de a oferi feedback asupra calității programelor de studiu.

V. Formarea profesorilor

Tradiția formării academice persistă și în cele mai evolute sisteme. Aceasta este intens corelată cu specificul disciplinei și mult mai puțin cu metodică predării. Totuși, se recunoaște valoarea practicii în țările analizate, întrucât până la 2/3 din formarea inițială este realizată prin practică. În toate sistemele de educație, formarea profesorilor rămâne un aspect critic, intens discutat, în special atunci când sunt explorate efecte cumulative la nivel de sistem. Per ansamblu, profesia didactică are un anumit prestigiu social.

VI. Motivarea în învățarea matematicii

În ultimii ani, o serie de studii atrag atenția asupra unui declin alarmant în ceea ce privește interesul pentru educația matematică. La nivel mondial, așa cum reiese din (meta)analiza celor mai multe cercetări, deciziile aplicate pentru combaterea performanței scăzute sunt legate de fixarea fundamentelor în învățarea matematicii (educația timpurie); suportul pentru diminuarea dificultăților de învățare; stimularea motivației, prin conexiuni cu alte discipline; implicarea părinților în procesul de învățare. În unele țări, al căror sistem de educație matematică a fost studiat, interesul pentru motivarea în învățarea matematicii este menținut prin manuale interesante, cu introducerea unor noțiuni și teorii noi pornind de la exemple

atractive din viața reală. Pe lângă acestea sunt organizate expoziții și festivaluri matematice. De asemenea, există muzee ale matematicii și secții dedicate matematicii în muzeele științei sau tehnologiei.

VII. Utilizarea tehnologiei

În ultimele decenii a crescut considerabil interesul pentru utilizarea tehnologiei în educația matematică. Calitatea resurselor digitale și medierea profesorului la clasă sunt recunoscute ca fiind vitale pentru integrarea tehnologiei. În țările studiate, se intervine în mod activ în diminuarea decalajului digital în diferitele medii sociale.

II. „EDUCAȚIA MATEMATICĂ ÎN ROMÂNIA”

Scop și metodologie

Acest studiu descrie educația matematică din România, așa cum este ea reprezentată în opinia profesorilor, investigată printr-o anchetă pe bază de chestionar la care au participat 340 profesori de matematică din învățământul preuniversitar; discuții pe grupuri tematice, organizate în cadrul atelierelor de lucru și a activității grupului facebook-SSMR.mat.edu. **(vezi anexa 2).**

CONCLUZII ALE STUDIULUI

I. Rolul educației matematice

În opinia participanților la studiu, cel mai important rol al educației matematice este pregătirea pentru piața muncii. Accesul la cariere de succes este o altă misiune a educației matematice. Conform percepției profesorilor, curriculumul național îndeplinește parțial rolurile menționate.

II. Curriculumul matematic

Calitatea curriculumului, este, în ansamblu, contestată de practicieni. Cele mai frecvente neajunsuri vizează natura conținuturilor: nivelul ridicat de abstractizare

a cunoștințelor, lipsa suportului intuitiv al resurselor de învățare, absența inter/transdisciplinarității și algoritmizarea excesivă. Alte critici fac referire la lipsa de continuitate între programele școlare pe niveluri de școlaritate succesive.

III. Practicile de instruire

Practicienii din educație constată faptul că, prin modul în care este proiectat și, în consecință, aplicat la clasă, curriculumul matematic este unul din factorii ce generează strategii de instruire simple. Abilitățile metodice ale profesorilor influențează decisiv modul în care se realizează instruirea la clasă. În cele mai multe cazuri, instruirea la clasă este intens dirijată, predictibilă. Alți profesori participanți la studiu, în număr mai mic, exponenți ai unei categorii profesionale bine pregătite, introduc în mod creativ în predare resursele digitale.

IV. Evaluarea performanțelor

În comunitatea profesorilor, se admite faptul că se promovează în special evaluarea conform standardelor și mai puțin, aprecierea progreselor individuale ale elevilor realizate prin învățarea autonomă. Conform opiniei profesorilor, performanțele sunt condiționate de antrenamentul pentru examene și simularea prin teste similare. Capacitatea de aplicare a cunoștințelor matematice este o abilitate exersată minimal în evaluare, sub forma folosirii formulelor în diferite exerciții sau a unei succesiuni de pași în rezolvarea problemelor de tip matematic.

V. Formarea profesorilor

În România, pregătirea profesorilor este deficitară, cauza identificată fiind lipsa unor masterate didactice eficiente și a unor stagii de perfecționare utile care să fie coordonate de către universități cu tradiție în educație. Formarea inițială a profesorilor trebuie regândită integral, astfel încât pregătirea practică și metodică să aibă utilitatea așteptată. Așa cum reiese din studiu, profesorii participanți apelează la alternative de dezvoltare profesională și formare continuă mai puțin convenționale (atelieri, conferințe, cursuri).

VI. Motivarea în învățarea matematicii

O parte din profesorii români semnalează scăderea treptată a motivației pentru studiul matematicii pe parcursul anilor de gimnaziu și liceu. Cauzele sunt multiple. Cele mai des evocate se referă la concepția resurselor folosite (lipsa de semnificație și slaba aplicare a conceptelor matematice, accent pe memorare și reproducere, nivelul ridicat de dificultate al limbajului matematic) și modul în care se realizează instruirea la clasă (centrarea pe verificare, slaba recompensare a

performanței, sancțiunea negativă, folosirea de resurse și metode de învățare neatractive).

VII. Utilizarea tehnologiei

Profesorii consideră că aplicarea tehnologiei în învățarea matematicii este deficitară, din punctul de vedere al dotării cu echipamente și resurse, cât și al proiectării manualelor cu o astfel de deschidere. Aceasta trebuie promovată în mod susținut, prin instruirea profesorilor și prin includerea sugestiilor de utilizare în curriculumul matematic. Practicienii recunosc valoarea adăugată a tehnologiei și promovează, în urma experiențelor proprii, eficiența resurselor digitale în învățarea matematicii.

III. EDUCAȚIA MATEMATICĂ ÎN ROMÂNIA - DIRECȚII DE ACȚIUNE

În urma unei analize realiste a educației matematice pe plan internațional și în România, am formulat în mod argumentat o serie de priorități în zonele cunoscute ca fiind critice **(vezi anexa 3)**.

Dezbaterile în grupurile de lucru au relevat complexitatea educației matematice. La cel puțin una din aceste întâlniri au participat: membri ai Societății de Științe Matematice din România, experți în educația matematică din Germania și SUA, membri ai Institutului de Științe ale Educației, membri ai Consiliului Național de Evaluare, un specialist în psihometrie și un specialist în Științele Educației.

Documentul elaborat conține o serie de recomandări generale, dar și direcții de acțiune pe care Societatea de Științe Matematice le-a trasat în mod pragmatic, realizabile prin noi proiecte.

Propunerile și recomandările vizează următoarele aspecte:

I. Rolul educației matematice

- Este acela de a fi suport pentru formarea culturii științifice și de a forma abilități de a raționa corect și a aplica matematica în situații concrete. Pentru a îndeplini acest rol, matematica școlară trebuie să fie prezentată elevilor în mod interdisciplinar, în corelație cu fizica, chimia, biologia, economia etc.

II. Curriculumul matematic

- Îmbunătățirea calității programelor școlare și a materialelor de învățare prin: reactualizarea ghidului pentru profesori elaborat de MENCS cu exemple de bune practici, în vederea urmăririi în practica instruirii a dezvoltării competențelor din programele școlare; corelarea pe orizontală a acelor noțiuni matematice care se regăsesc în conținuturile mai multor discipline; crearea unui ghid care să faciliteze corelarea programelor cu manualele existente deja; realizarea corespondențelor între conținuturile evaluărilor naționale și cele din programele școlare.

III. Practicile de instruire

- Realizarea de modele demonstrative de lecții și promovarea resurselor educaționale creative în cadrul evenimentelor profesionale și cu ajutorul mijloacelor tehnologice (platformă națională). Materialele de învățare trebuie să aibă un conținut concret, intuitiv, fără formalizarea exagerată, specifică celor mai multe auxiliare existente la momentul actual.

IV. Evaluarea performanțelor

- Revizuirea conținutului testărilor standardizate, a metodelor de testare aplicate la nivel național (adaptate nivelului de competență al elevilor și profilului școlilor, conform unor standarde specifice).
- Folosirea platformelor de testare on-line dezvoltate de profesioniști.

V. Formarea profesorilor

- Necesitatea profesionalizării prin masteratul didactic.
- Propunem o serie de activități ce vizează perfecționarea (formarea continuă) a profesorilor: concursuri dedicate profesorilor, de dezvoltare de modele de lecții inovative și atractive; organizarea cursului anual acreditat de MENCS; realizarea unui ghid metodologic de înțelegere și aplicare a programelor de nivel gimnazial și/sau liceal.

VI. Motivarea în învățarea matematicii

- Sporirea atractivității matematicii școlare, atât la nivelul conținutului resurselor de învățare (prin exemple privind utilitatea matematicii în viața

reală), cât și la nivelul strategiilor de motivare (elaborarea unui manual al profesorului).

VII. Utilizarea tehnologiei

- Includerea în programele de studiu de sugestii metodologice de utilizare a tehnologiei și realizarea unui manual cu exemple de utilizare ale calculatorului. Considerăm necesară crearea unei platforme dedicată educației matematice în România.

Coordonator: conf. univ. dr. Silvia Făt

Autorii, în ordine alfabetică: prof. Mihail Bălună, prof. univ. dr. Wladimir Boskoff, conf. univ. dr. Cătălin Gherghe, prof. univ. dr. Radu Gologan, prof. univ. dr. Doru Ștefănescu.

Manager proiect: Mihaela Frunzeti

Toți participanții la proiect au demonstrat că pot ei înșiși genera o cultură a dezvoltării în educația matematică.

Mulțumiri deosebite adresate profesorilor care au contribuit la realizarea acestor documente precum și managerului de program al Romanian American Foundation.

Irina Vasilescu, Ancuța Mititean, Ioana Nicoleta Rădulescu, Crina Bercovici, Virgilius Teodorescu, Cristina Hlevca Caraman, Andrei Alexandrescu, Nicoleta Agenna Mazilu Ionescu, Alina Ioan, Sorin Borodi, Adina Carmen Oancea, Cristian Alexandrescu, Sena Azis, Petru Marian Braica, Felician Preda Dumitru, Daniela Sîrghie, Roxana Camelia Goga, Marius Perianu, Gabriela Neguțescu, Anamaria Golumbeanu, Vladimira Palașcă, Dominica Moise, Maria Petrescu, Alina-Elena Grecu, Ariana-Stanca Văcărețu, Ovidiu Șontea, Marilena Faiciuc, Marius Măinea, Manuela Mihăiță, Gabriela Chircă, Ana Elisabeta Naghi, Angela Pârvulescu, Cornel Constantin Gănescu, Emil Moldoveanu, Măriuța Alexandra, Daniela Violeta Iancu, Andrei Octavian Dobre, Ana Mocanu, Mihaela Molodeț, Ciprian Dobranis, Radu Prisăcaru, Iulia Căpităneanu, Dorin Buzgău, Mihaela Diaconu, Mioara Bucur, Marian Haiducu, Elena Chirea, Vlad Copil, Ioana-Monica Mașca, Luminița Catană (cercetător ISE).

De asemenea, celor 340 de profesori din țară care au răspuns în ancheta dedicată educației matematice.

ANEXE

ANEXA 1. STUDIUL 1



Coordonator: Silvia Făt
Autorii, în ordine alfabetică: Mihail Bălună,
Wladimir Boskoff, Cătălin Gherghe, Radu Gologan,
Doru Ștefănescu.



CUPRINS

Mesajul autorilor

I. 1. Motivația studiului	4
2. Obiectivele studiului	5
II. Tendințe ale educației matematice în lume	6
1. Rolul educației matematice	6
2. Curriculumul matematic	13
2. Practici de instruire	16
3. Testări standardizate	21
4. Formarea profesorilor	26
5. Motivarea în învățarea matematicii	30
6. Utilizarea tehnologiei	32

Anexa

Bibliografie

Lista tabelelor și figurilor

Mesajul autorilor

Societatea de Științe Matematice din România este autorul unor proiecte de succes în educația matematică. Înființată în 1910 sub numele de Societatea Gazeta Matematică, aceasta are 6500 de membri și 51 de filiale la nivel național. Fiind una din cele mai vechi societăți de matematică din Europa, este membru fondator al Societății de Matematică din Sud-estul Europei și membru al Societății Europene de Matematică.

Ne propunem, prin acest proiect, să influențăm pozitiv percepția socială asupra rolului matematicii în societatea noastră și să promovăm educația matematică pentru toți. Studiul de față este și o declarație despre valorile care definesc concepția noastră despre educație. Dorim să trasăm încă o dată prioritățile în zonele cunoscute ca fiind critice și să facilităm colaborarea între cei mai buni practicieni – profesorii de matematică și cercetătorii din educație.

Inițiativa noastră presupune capitalizarea unor experiențe de succes, mai mult sau mai puțin posibile în contextul românesc. Enumerând o serie de provocări ale unui domeniu atât de vast precum educația matematică, încercăm să rămânem imparțiali, în ciuda admirației pe care o avem pentru o cultură sau alta.

Mulțumiri deosebite adresate Romanian American Foundation¹, care, printr-o susținere intensă, a făcut posibil acest exercițiu profesional. Ne dorim să punem bazele unei comunități mult mai vocale, care să exprime emoțiile și aspirațiile generației actuale de profesori și elevi, cu speranța că acestea vor fi concretizate în schimbările mult așteptate de ei.

¹ Romanian-American Foundation a fost înființată în 2009, ca un continuator al Romanian-American Enterprise Fund (RAEF), creat în 1994 de către Congresul Statelor Unite. Strategia RAF are trei obiective prioritare: dezvoltare economică în zonele rurale, inovație-tehnologie și implicare civică în România.

Argument

1. Motivația studiului

Scopul proiectului inițiat de Societatea de Științe Matematice și Romanian-American Foundation: propunerea de către un grup de practicieni a unor direcții concrete de acțiune, pentru optimizarea curriculumului matematic de nivel secundar, centrat pe reușita socială a elevului.

Scopul studiului: evocarea experiențelor de succes, prin care anumite țări s-au evidențiat în ierarhiile internaționale: S.U.A., Germania, Franța, Anglia, Australia, Japonia, Coreea de și Sud.

Studiul de față este rezultatul unui efort colaborativ de documentare, dar și al analizei pe care o poate legitima experiența internațională a autorilor

Studiul de față descrie câteva experiențe internaționale relevante pentru educația matematică. Ne propunem să urmărim cum se construiește cultura matematică și cum este ea valorizată de către școală. Bineînțeles, matematica este mai mult decât un obiect de studiu, și anume, un domeniu creativ, dezvoltat în timp ca instrument eficient în răspunsul la problemele științei/societății. Anumite culturi educaționale, nu multe, reușesc să confere matematicii misiunea socială pe care aceasta o are.

La o simplă căutare a termenului „math education”, Google ne oferă 34.000.000 de rezultate. Site-urile abundă în resurse educaționale, rapoarte, studii și analize, din care deducem că educația matematică este o construcție complexă, cu efecte cognitive, dar și economice foarte importante.

Studiul integrează și câteva concluzii selective ale cercetărilor evaluative ce au însoțit programele internaționale OECD² - Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS), Programme for International Student Assessment (PISA) și Eurydice.

Chiar dacă aceste experiențe sunt pentru noi un model de reușită, analiza, bazată pe dovezi, a acestor practici, ne relevă foarte multe dificultăți comune. Complexitatea acestor realități nu atenuează însă prestigiul pe care îl au la nivel mondial.

² Organizația pentru Cooperare și Dezvoltare Economică este cea mai mare agenție de statistică la nivel mondial. Este o organizație internațională formată din 34 de țări, fondată în anul 1961 pentru a stimula dezvoltarea economică și de a promova politici sociale internaționale.

2. Obiectivele studiului

1. Vom include în analiza noastră spații educative diferite, relevante pentru calitatea optimă a educației matematice, chiar dacă acestea se distanțează major de cultura noastră;

2. Vom evoca surse de optimizare a curriculumului matematic;

3. Vom estima, în urma studiului, potențialul de valorificare a acestor experiențe pentru educația matematică din țara noastră.

Ne dorim ca aceste elemente să depășească cadrul analizei argumentate statistic, întrucât suntem interesați de o interpretare calitativă nuanțată, specifică realităților educaționale. Multe incertitudini sunt comune, intens problematizate în toate aceste contexte. Acestea pot fi redată prin întrebările de mai jos.

Întrebări esențiale

- Există, la nivelul sistemului de educație analizat, o concepție coerentă despre educația matematică? Dacă o asemenea viziune există, „laboratorul național” de curriculum a inclus propuneri și experiențe ale practicienilor?
- Există un follow-up din perspectiva tuturor tipurilor de rezultate așteptate în învățare, în special cea profesională?
- Ce tip de matematică predomină în spațiul educativ, matematica algoritmică sau cea creativă?
- Ce reprezentări sunt vehiculate în educația matematică de către actorii ei?
- Cum este integrată tehnologia în educația matematică?
- Care este formula ideală de formare profesională?
- Ce model instrucțional s-a preconizat inițial? Ce model folosesc în realitate profesorii?
- Ce modificări au adus evaluările naționale și internaționale asupra practicilor de instruire?

Beneficiarii acestui studiu pot fi atât decidenți, cât și designeri instrucționali și practicieni. În atenția noastră se află: cercetători educaționali, specialiști în proiectare curriculară în toate domeniile incluse în curriculum, autori de manuale/resurse digitale, profesori colaboratori ai Societății de Științe Matematice din România, profesorii de matematică din învățământul secundar.

Dedicăm efortul nostru elevilor, sursa cea mai importantă a motivației noastre.

I. TENDINȚE ALE EDUCAȚIEI MATEMATICE ÎN LUME

Am identificat, în urma analizei experiențelor din SUA, Germania, Franța, Anglia, Australia, Japonia, Coreea de Sud, o serie de principii educative aplicate în aceste contexte locale. „Realitățile” diverse ne demonstrează faptul că nu există efecte similare ale acestor principii. De ce? Pentru că educația matematică este un fapt variabil cultural.

Prezentăm o listă selectivă a tendințelor, anticipând efectele pe care acestea le pot avea asupra educației din țara noastră.

1. ROLUL EDUCAȚIEI MATEMATICE

Rolul educației matematice s-a schimbat, devenind un domeniu cu implicații sociale importante.

Educația matematică *de calitate și educația matematică pentru toți* par a fi două concepte/realități ireconciliabile. Rezultatele optime la evaluările internaționale devin argumente ale unei teze căreia și noi îi acordăm un mare credit: succesul sistemelor de educație este dat de investiția în *educația matematică timpurie de tip inclusiv*, accesibilă în mediile sociale cele mai diverse. Nu este, așa cum vom vedea, singura sursă a reușitei. Reușita este efectul unei multitudini de factori.

De la preconcepții la erori în practica instruirii

Din păcate, în educație, cele mai fervente contestări, dar și cele mai mari erori, sunt produse de proprii specialiști sau practicieni. Matematica a fost mult timp reprezentată, în spațiul educativ, ca o activitate solitară, ușor elitistă, independentă de tehnologie sau ruptă de problemele lumii reale. Mai mult, aceasta se autodefineste ca un exercițiu intens deductiv, în care raționamente incontestabile produc certitudini de tipul teoremelor sau axiomelor.

Astfel de preconcepții au afectat, în timp, modul în care matematica a fost percepută în școli.

Anumiți profesori, actori ai unor sisteme de formare „încremenite” în paradigma tradițională, cred că matematica este privilegiul unei categorii speciale de elevi. De ce se întâmplă acest lucru? Pentru că, în educație, psihometria - măsurarea prin teste de inteligență a capacităților elevilor, a produs daune ireparabile generații la rând: etichetare, segregare socială, excludere, elitism. Aceste efecte au devenit în timp obstacole în educația matematică, surmontabile doar prin înțelegerea corectă de către profesori a rolului matematicii în viața elevului. Cei mai mulți profesori știu astăzi că:

În sistemele de educație evocate, profesorii conștientizează faptul că matematica școlară are, pentru cei mai mulți „utilizatori”, o perspectivă socială, și pentru cei mai puțini, o valoare academică.

determinarea genetică a inteligenței nu este o fatalitate; învățarea este influențată de factori multipli, cei emoționali fiind foarte importanți; abilitățile cognitive se dezvoltă prin antrenament sistematic; centrarea pe performanță superioară este o gândire păguboasă etc.

Într-un raport din 2008³, autorii au observat că, în timp ce mai puțin de 0.5% din absolvenți s-au specializat în matematică și în jur de 40% sunt utilizatori profesionali, 100% din elevi au nevoie de o matematică practică, care să-i pregătească pentru deciziile din viața personală și socială.

1.1. Cultura matematică este o cale de acces către profesiile științifice.

În cazul performerilor de vârf, printre care **Australia**, **Franța** și **Anglia**, 82% din subiectele studiate în școală sunt cadrul de dezvoltare a abilităților de bază necesare pentru o viitoare profesie corelată cu științele. La nivel internațional, resurse substanțiale sunt dedicate comparabilității rezultatelor elevilor la testele standardizate, analiză posibilă prin includerea acelorași itemi în evaluări succesive. De exemplu, la PISA 2006 au fost evaluați aproximativ 500.000 de elevi cu vârsta de 15 ani, din 65 de țări participante. În țările OECD, 18% din elevi sunt *top performers*⁴ la cel puțin o disciplină: științe, matematică și/sau lectură. Doar 4% sunt performanți în toate domeniile enumerate.

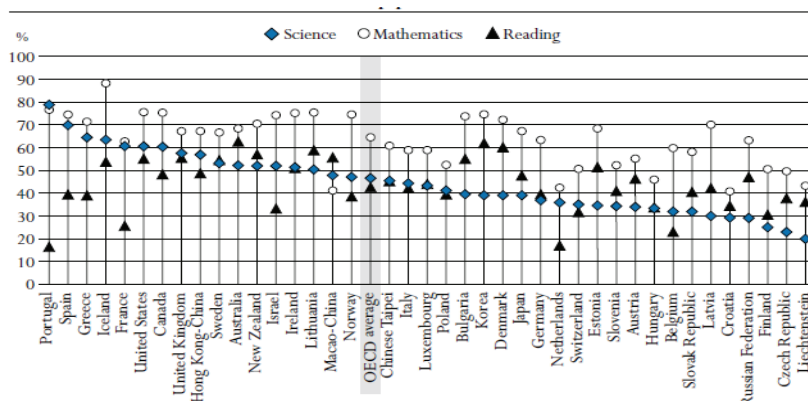


Fig. 1. Percepția elevilor despre importanța matematicii, științelor și lecturii. PISA 2006 Sursa: OECD Indicators (2009).

³ Petter Sullivan, Teaching Mathematics: using informed teaching strategies, ACER Press, 2011.

⁴ Competențe de nivelul 5 și 6 (scoruri mai mari de 606.99 puncte) ce aparțin celor ce pot identifica, explica și aplica cunoașterea în situații variate de viață.



În **Germania**, educația vocațională este bine reprezentată încă de la nivel secundar. Matematica este obligatorie în toate programele vocaționale. Un efect constatat în ultimii ani este creșterea numărului absolvenților de școli vocaționale care urmează studii universitare sau Fachhochschule⁵. Acest sistem dual creat de școală și piața muncii este un succes: 80% din elevii de nivel secundar urmează cursuri vocaționale. Toți elevii „vocaționali” fac matematică, iar cei din școlile în domeniul ingineriei, fac matematici avansate.

În **Anglia**, matematica este recunoscută ca una din căile de acces către profesiile științifice. Recent a fost lansată Rețeaua de Știință, Tehnologie, Inginerie și Matematică-STEMNET, un program care implică școli, colegii, organizații locale, precum și mediul de afaceri. De asemenea, se discută la nivel oficial despre crearea unor strategii naționale de orientare a carierei tinerelor, în special, către aceste profesii, prin intermediul educației matematice.

În **Australia**, curriculumul oferă elevilor șansa de a studia matematica. De exemplu, australienii consideră că este esențial ca toți elevii să studieze algebra și geometria. NMAP⁶ arată că învățarea algebrei este corelată cu reușita în finalizarea liceului. Slaba absolvire a liceului este corelată cu angajarea deficitară ca forță de muncă, respectiv subzistența. Se specifică astfel, că studiul algebrei nu pune doar bazele matematicilor specializate, ci este unul din aspectele vocaționale importante ale educației matematice.

În **Franța**, în anii anteriori, 42% din elevii care alegeau științele exacte la evaluarea finală, studiau la universitate, discipline precum matematica. Recent, fenomenul înregistrează o descreștere vizibilă, de chiar 15%. Filiera științifică din licee este cunoscută ca fiind „calea regală” spre universitățile prestigioase. Etapa *Première* crează un profil al absolventului apt să urmeze o carieră științifică. Ponderea studentelor se situează la nivelul a 35% din totalul studenților. De aceea, Franța încurajează fetele să urmeze studii în domeniile științifice prin intermediul unor campanii naționale de susținere.

Coreea de Sud a selectat, începând cu anul 2011, 23 de școli care să fie gestionate la nivel regional de departamentele de educație. Aceste școli au ca scop dezvoltarea și selectarea resursei umane în științe și tehnologie, ca viitori lideri în aceste domenii. Curriculumul conține discipline atât fundamentale, cât și puternic specializate,

⁵ Universitate de Științe Aplicate, cu rang de institut de învățământ superior.

⁶ National Mathematics Advisory Panel – raport de evaluare curriculară realizat în 2008 în Australia

cele din urmă fiind destinate celor mai competenți elevi. La nivel național, în 2010, aici erau 907 instituții în care 3.283 elevi dotați urmau programe de matematică și 3.404 elevi înrolați în programe de științe.

Japonia, celebră pentru performanța în știință și tehnologie, acordă o atenție deosebită educației matematice. O cercetare din anul 2002, nu tocmai recentă, dar valabilă încă, releva faptul că peste 75% din elevi corelau matematica cu reușita socială. Educația științifică și tehnologică are o calitate excepțională, raportată la standardele internaționale, datorită următoarelor: standarde academice naționale ridicate, un cadru legal de suport pentru științe, matematică și tehnologie, suport inclusiv financiar (manuale gratuite, echipamente asigurate de guvern), studiul lecțiilor (“jugyou kenkyu”), publicarea planurilor de lecții și diseminarea lecțiilor filmate către un public larg.

Observație: Singurul domeniu din educația matematică, în care numărul elevilor și studenților a rămas constant, și, în unele țări, în creștere, este informatica. Matematica școlară s-a reanimat datorită informaticii.

Există preconcepția conform căreia matematica este cultural neutră. Realitatea este aceeași și în educația matematică: există multiple stereotipuri culturale, de gen sau sociale ce duc la inegalități educaționale.

1.2. Educația de gen - un trend internațional ce susține egalitatea de șansă

Cercetările comparative asupra segregării de gen sunt bazate, în general, pe ipoteza stratificării, ce specifică faptul că factorii structurali și culturali joacă un rol important în crearea acestor diferențe. Un background socio-economic scăzut nu este o barieră pentru realizarea performanței optime. În țările menționate, 1/4 din performerii de top la testele internaționale provin din familii cu un nivel de trai modest spre mediu.

Societățile, evaluate diferit din punct de vedere economic, influențează însă nivelul de participare a populației feminine în diferite arii de activitate. La matematică, diferențele de gen sunt relevate în special de rezultatele la testele standardizate. În majoritatea țărilor participante la astfel de evaluări, fetele au performanțe mai bune în timpul anilor de studiu, dar la aceste teste, nu (EACEA/Eurydice, 2010; OECD, 2004).

În țările evocate, dacă procentul de *top performers* în Științe este foarte mic, dar similar (1.1% fete și 1.5% băieți), la Lectură, sunt mai multe fete decât băieți (3.7% fete și 0.8% băieți), iar la Matematică, mai mulți băieți decât fete (3.7% fete și 6.8% băieți).

În Europa, studiile au evidențiat însă că diferențele legate de gen sunt mai mari în motivația și atitudinea față de matematică, și mai puțin la nivelul performanțelor.

1.3. Educația matematică încearcă să reflecte natura inter-, transdisciplinară a învățării

În literatura dedicată educației matematice se promovează tot mai mult ideea conform căreia *vocația matematicii trebuie să fie și una practică*. La baza acestei concepții se află *teoria învățării în context* (elaborată de Collins, Brown și Newman în 1987), care pune accent pe achiziția de cunoștințe/abilități în contexte ce demonstrează cum acestea pot fi folosite în viața reală.

Matematica are valențe aplicative prin: *abilitatea de a explica logic, de a gândi structurat, de a face predicții, de a înregistra aspecte ale mediilor fizice sau interacțiunilor sociale, de a comunica în termeni cantitativi și spațiali, de a identifica situații în care matematica poate fi aplicată adoptând soluții tehnologice*.

S-a constatat adeseori faptul că, deși elevii posedă cunoștințe matematice importante, acest lucru nu garantează și un transfer real al acestora. Dimpotrivă, se constată frecvent

disocieri și rupturi între abstract și concret, între particular și general etc. O soluție poate fi dată de promovarea învățării integrate.

Premisa aplicării matematicii este dată de dezvoltarea gândirii logice, structurate, deci de fundamente cognitive. O astfel de abordare trebuie încurajată, în special, în anii de educație obligatorie.

Subdomeniile matematice contribuie în mod natural, complementar, la dezvoltarea unei gândiri corecte, structurate. Numerația (P. Sullivan, 2011)⁷, de exemplu, este o temă din aritmetică, dar și un tip de informație integrată

metodelor procedurale legate de estimări, raționamente, rezolvare de probleme. În plus, la nivel de obligații școlare, elevii au aceleași provocări în față: multiple conexiuni între conceptele matematice, formularea, înțelegerea și rezolvarea de probleme.

Programele OECD – PISA și TIMSS vizează competențele de tip integrat și aplicativ, fapt ce a modificat deja practicile instrucționale în câteva țări. În cazul matematicii, așa cum am precizat anterior, se insistă pe: rezolvarea situațiilor-problemă, explorarea independentă, formularea de ipoteze și efectuarea calculului matematic de bază, aplicarea raționamentului logico-matematic în situații uzuale.

⁷ Petter Sullivan, Teaching Mathematics: using informed teaching strategies, ACER Press, 2011.

Este importantă organizarea conținuturilor în module sau teme, prin care să se urmeze exigențele unui model de învățare integrată verificat. Cel mai des folosit este modelul învățării transdisciplinare al lui L. D'Hainaut⁸, care poate fi reprezentat cu succes în matematica școlară.



Curriculumul matematic din **Germania** deține următoarele principii, centrate pe gândirea inter-, transdisciplinară: rezolvarea de probleme din științele naturii și societate și modelarea unor fenomene ale acestora; dualitatea între gândirea deterministă și cea probabilistă; experimentarea ideilor prin dezvoltarea tehnicilor de gândire inductivă și deductivă; construirea mentală a demonstrației, axiomatizării și generalizării; istoria gândirii matematice.

În **Australia**, Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (ACARA 2010), orientează cunoașterea matematică, la sugestia specialiștilor⁹, către cinci standarde, gândite ca trecând dincolo de spațiul matematicii :

- *înțelegerea conceptuală* - abilitatea de a explica concepte, operații și relații;
- *fluența procedurală* - set de abilități de utilizare a procedeelelor în mod flexibil și eficient;
- *competența strategică* - abilitatea de a formula, reprezenta și rezolva probleme;
- *raționamentul adaptiv* - capacitatea de a gândi logic, reflecta, explica și argumenta;
- *atitudinea productivă* - capacitatea de a aplica matematica în viață.

În **Japonia**, elevii conștientizează rolul esențial al comunicării în învățarea și utilizarea matematicii; gândirea și raționamentul matematic sunt dezvoltate prin formularea unor concluzii prin analogie sau inducție, acestea fiind apoi argumentate; este stimulată gândirea divergentă, dar este respectată și perspectiva soluțiilor multiple. Lecțiile din Japonia se evidențiază prin stimularea învățării prin problematizare (Hiebert et al., 1996)¹⁰. Astfel, *problema* devine contextul în care abilitățile sunt în mod complementar utilizate și dezvoltate. Lecția nu este centrată pe soluție, ci pe înțelegerea de către elevi a principiilor și proprietăților matematice.

În **SUA**, cadrul curricular variază în diferitele state, dar scopul comun declarat vizează aplicarea matematicii în viața reală.

⁸ Acesta cuprinde următoarele rezultate ale învățării: exploatarea informațiilor, gândirea abstractă, adaptarea, utilizarea de metode, conducerea schimbării, creativitatea, predicția, competența proiectivă, organizarea științifică, rezolvarea problemelor, gândirea explicativă, utilizarea limbajelor și a codurilor, gândirea selectivă, comunicarea eficientă, decizia, relaționarea cu mediul, evaluarea, acțiunea eficientă, învățarea eficientă, demonstrarea.

⁹ Killpatrick, Swafford and Findell, Adding it up, în Petter Sullivan, Teaching Mathematics: using informed teaching strategies, ACER Press, 2011.

¹⁰ Hiebert, J. Stigler, J. , *A world of difference* 25/4, Mathematics and Science, 2004.

În **Franța** (recunoscută pentru tradiția culturii generale a absolventului), conținuturile curriculare prezintă și geneza conceptelor matematice, fundamentul lor interdisciplinar, precum și aspecte din istoria matematicii.

În **Coreea de Sud**, obiectivele deschise ale educației matematice depășesc organizarea internă a disciplinei: dezvoltarea abilității de a gândi și comunica matematic pentru a explora fenomene și probleme diverse; construirea de soluții practice; stimularea atitudinii pozitive față de matematică.

În **Anglia**, unde curriculumul național a fost creat încă din 1988, s-a făcut recent trecerea de la un curriculum centrat pe conținuturi, la un curriculum aplicat. Astăzi, programele de matematică din ciclul secundar pun accent pe exersarea gândirii matematice în context. De asemenea, evaluările se raportează la învățarea prin acțiune (*learning by doing*) și învățarea de tip integrat.

Critici vehemente

Interesul pentru abordarea inter-, transdisciplinară este dat de cerința privind aplicabilitatea matematicii școlare. Cercetarea finalității practice a matematicii este realizată prin studii longitudinale, comparative sau de impact conduse de instituții internaționale. Din păcate, multe descriu inițiativele naționale în termeni critici. O astfel de finalitate nu pare a fi posibilă datorită modului în care este aplicat la clasă curriculumul atent proiectat. De exemplu, într-un astfel de studiu condus de Comisia Europeană, în 2007, se precizează:

- matematica este încă proiectată ca un act formal de predare, centrat pe memorarea regulilor și tehnicilor rezolutive;
- elevii nu corelează capacitățile cognitive exersate cu anumite cunoștințe matematice;
- exemplele sunt slab corelate cu lumea reală, iar aplicațiile matematice sunt stereotipe;
- tehnologia este rareori folosită;
- elevii manifestă extrem de puțină autonomie în învățare.

În SUA, curriculumul propus de National Science Foundation¹¹ a avut și el numeroase critici:

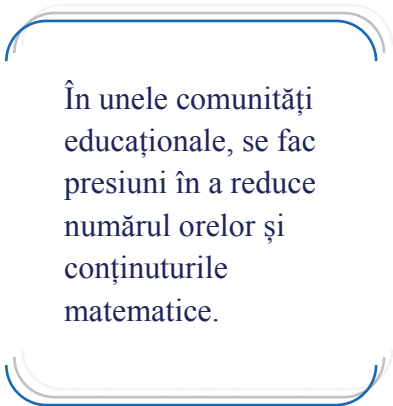
- programele din învățământul elementar stimulează elevii să creeze algoritmi aritmetici proprii, descurajând folosirea algoritmilor standard superiori;
- folosirea calculatorului este excesiv recomandată, în unele cazuri acesta fiind inclus în activitățile de matematică în clasele mici;
- metoda de învățare prin descoperire în grup este folosită în exces și devine inefficientă;
- teme din statistica și analiza datelor sunt redundante de la un nivel de studiu la altul;
- definițiile și demonstrațiile matematice pentru clasele mai mari sunt inefficiente sau lipsesc uneori.

¹¹ Fundația Națională de Științe din Statele Unite este o agenție guvernamentală americană ce susține procesele de cercetare și educație în toate domeniile non-medicale ale științei și ingineriei.

2. CURRICULUMUL MATEMATIC

Curriculumul matematic, deși orientat de repere normative, are o dinamică determinată de cerințe actuale.

Reformele în educație sunt reforme curriculare. Începând cu 2007, în țările analizate, accentul se pune pe rezultatele învățării în termeni de *competențe*, iar conținuturile trec în plan secundar, devenind mijloace pentru realizarea acestora. Pentru a facilita conexiunile între discipline, precum și aplicarea cunoștințelor, volumul conținutului educațional a trebuit să fie în mod considerabil redus.



În unele comunități educaționale, se fac presiuni în a reduce numărul orelor și conținuturile matematice.

Conținuturile matematice și rezultatele învățării creează interacțiuni dintre cele mai interesante. Indiferent de modul în care interacționează, principala așteptare este, în termeni pedagogici, *cunoașterea operațională* (capacitatea de a folosi instrumente matematice

pentru a rezolva situații de viață).

Interesul pentru curriculumul matematic este motivat de analizele cross-naționale ale performanțelor elevilor, ca surse importante de feedback. Un număr mare de studii evidențiază faptul că există diferențe notabile între SUA, Europa și Asia, la nivel de proiectare a curriculumului matematic, dar și în modul în care acesta este aplicat la clasă. Cu toate acestea, începând cu 2005, reformele naționale au inspirat și împărtășit simultan conceptul internațional de *mathematical literacy*¹².

Următoarele competențe sunt considerate importante la nivel mondial, cu o prevalare a unora în raport cu celelalte: 1. *gândirea matematică*; 2. *prezentare și rezolvare de probleme*; 3. *modelare matematică*; 4. *raționament matematic*; 5. *reprezentarea entităților matematice*; 6. *utilizarea simbolurilor abstracte*; 7. *comunicare în matematică*; 8. *utilizarea instrumentelor, inclusiv a celor digitale*.

¹² Capacitatea individuală de a înțelege rolul matematicii în lume, de a face raționamente corecte și de a folosi matematica în modul în care ea poate răspunde nevoilor individului ca cetățean activ, responsabil și reflexiv (OECD Report, 2009).



În **Coreea de Sud**, cele mai recente forme ale curriculumului își propun să stimuleze interesul elevilor față de matematică, prin simplificarea conținuturilor studiate și prin introducerea activă a tehnologiei. Tendința a fost cea de reducere a curriculumului, deși aceasta s-a materializat prin transferul conținuturilor la

În țările analizate, în jur de 40% din curriculumul obligatoriu pentru 12-14 ani, include trei domenii: lectură, scriere și literatură (16%), matematică (13%) și științe (12%). Alte componente sunt limbile străine, studii sociale, arte și educație fizică.

clasa următoare. Luând ca etalon curriculumul japonez, Coreea de Sud a redus cu o treime conținutul studiat în școală, prin diminuări succesive, în 2011 și 2015. Elevii au 4 ore pe săptămână din curriculumul comun, iar în clasele a XI-XII, au libertatea de a alege o anumită tematică. De asemenea, sunt create trasee de învățare diferențiată pentru elevi.

În **Australia**, curriculumul descrie detaliat conținuturile matematice, cărora li se asociază, pentru fiecare clasă, portofolii de nivel conform unor standarde graduale. Resursele sunt foarte variate și conțin și exemple de lecții, teste și exerciții, precum și teme adiționale. Profesorii australieni observă faptul că trebuie să parcurgă teme succesive fără a le consolida suficient pe cele anterioare. Cei mai mulți cred că ar fi bine ca aceste conținuturi să fie reduse, dezvoltându-se doar temele importante. Întrucât există dificultăți legate de identificarea acestor teme centrale, o soluție ar fi realizarea unor conexiuni între conceptele matematice complementare.

În **SUA**, studiile din anii '80 evidențiau calitatea scăzută a educației matematice. Printre rapoartele scrise în acea perioadă, două au atras atenția în mod special:

- *An Agenda for Action*, realizat de National Council of Teachers of Mathematics, care promova ca idee centrală „învățarea matematicii prin aprofundarea tehnicilor de „problem solving” (rezolvarea de probleme).
- *A Nation At Risk*, care punea accentul pe stabilirea unor standarde privind competențele matematice și pe standardizarea testărilor în trecerea de la un ciclu la altul. Raportul pune problema slabei pregătiri academice a profesorilor sau a „rescrierii” manualelor în termeni mult mai clari prin colaborarea între profesori universitari, profesori de liceu, matematicieni și membri ai societăților profesionale.

Oficialii din 48 de state au pledat în 2009 pentru standarde comune în educația matematică prin programul CCSSM¹³. În SUA, libertatea este un principiu aplicat. Elevii pot opta pentru anumite cursuri din cele existente, profesorul având rolul de a orienta alegerea acestora, în funcție de nivelul abilităților. Școala optează pentru unul din programele propuse, asumându-și misiunea de a realiza setul de standarde cerute de către CCSSM.

În **Coreea de Sud**, resursele de învățare au o calitate optimă, ce încearcă să reflecte cerințele actuale la nivel de obiective, standarde, strategii de învățare/evaluare. Reactualizarea este produsul experimentării in vivo a acestor resurse. Se recomandă pilotarea curriculumului în 12 școli - un eșantion reprezentativ din punct de vedere școlar, dar realitatea arată că eventuala revizuire e dificil de realizat ulterior, într-un interval atât de scurt de timp.

În **Germania**, la nivel secundar există peste 40 de curriculăe diferențiate la nivel de conținut educațional, dar orientate de standarde naționale unitare. Nu există, deci, un curriculum-nucleu. Profesorul are libertatea de a adapta conținuturile la nivelul claselor sau profilului elevilor. Școala decide tipul manualului potrivit profilului elevilor.

În **Japonia**, ca efect al standardelor internaționale, conținutul matematic al lecțiilor a devenit mult mai dificil decât în alte țări (de exemplu, SUA). Lecțiile sunt puternic structurate, coerente, vizând dezvoltarea progresivă a conceptelor și, mult mai puțin, aplicarea procedurilor. Ministerul Educației are un rol redus în aprobarea manualului, fiind interesat doar de neutralitatea conținutului și de corespondența cu temele majore din programul de studii. Standardele naționale definesc, de asemenea, obiectivele și conținuturile matematice printr-o atentă corelare.

În **Franța**, după 2008, s-a recurs la reducerea conținuturilor și s-a consolidat strategia de învățare prin rezolvarea de probleme. După 2009, prin raportarea la standardele internaționale, au fost introduse teme noi, precum algoritmi matematici și probabilitățile. Au fost elaborate ghiduri didactice care să sprijine abordarea la clasă a acestor teme. Capacitatea de a argumenta și atitudinea critică față de rezultatul obținut sunt două aspecte importante în propunerea conținuturilor matematice. Statul francez susține acest deziderat prin resurse educaționale excepționale, elaborate de echipe de profesori experți, perfecționați și bonificați corespunzător

¹³ Common Core State Standards for Mathematics este centrat pe un set de competențe clare, care permit învățarea conceptelor matematice în mod gradual și organizat, prin probleme din viața reală.

3. PRACTICI DE INSTRUIRE

Strategiile de învățare active, deși foarte populare, se regăsesc rareori în practicile de instruire la clasă.

Cercetările dedicate eficienței practicilor de instruire sunt frecvent realizate în țările evocate, devenind premise atunci când debutează anumite proiecte de schimbare. Aceste cercetări relevă în mod incontestabil efectele benefice ale învățării prin explorare:

- ✓ *învățarea prin încercare și eroare:* permite utilizarea erorilor în realizarea și accelerarea progreselor. Eroarea nu mai este o sancțiune frustrantă de învățare, ci o parte a procesului de învățare, cu un important rol de feedback stimulat. Aceasta face posibilă explorarea soluțiilor creative prin utilizarea strategiilor „riscante”, dar și reconstrucția informațiilor;
- ✓ *învățarea prin proiect:* activitate de tip științific în care elevii explorează, asemenea cercetătorului, și prelucrează informații pe o temă relevantă pentru experiența lor de viață;
- ✓ *învățarea prin probleme:* presupune demonstrarea de cunoștințe tip „learning by doing”, în contexte ce permit transferul de cunoștințe;

Dezvoltarea culturii
matematice a elevilor nu
exclue natura socială a
învățării.

- ✓ *învățarea colaborativă:* grupul este centrat pe un scop comun și produce un rezultat asumat.

Învățare colaborative sunt apreciate pentru efectele cognitive și sociale, lucrul în grupuri mici la matematică este puțin frecvent în raport cu studiul individual.



În **Anglia**, cunoscută ca având cele mai prestigioase școli, în analizele politicilor educaționale, se menționează cu sinceritate faptul că, de multe ori, predarea matematicii se realizează prin sarcini repetitive, verificabile prin automatisme. Percepția negativă asupra matematicii (centrate pe formarea prematură a ideilor) este prezentă și în rândul studenților, care descriu matematica academică ca fiind abstractă și, pentru mulți, inaccesibilă. Un raport din 2005 despre educația din Anglia concluzionează faptul că, deși profesorii se declară interesați de organizarea învățării active, activitățile matematice

¹⁴ Învățământul matematic în Europa: Provocări comune și politici naționale, Comisia Europeană, 2011 EACEA P9 Eurydice.

sunt, în mare parte, bazate pe receptare și memorizare (Swan, 2005)¹⁵. Lucrul în echipă este o metodă de învățare uzuală doar pentru 30% din elevii de clasa a VIII-a.

Școlile au autonomie în ceea ce privește gruparea elevilor în clase; în practică, majoritatea folosesc ca indiciu pentru grupare nivelul competenței. Instruirea diferențiată este însă extrem de prezentă, prin sesiuni de ratapare și îmbogățire, fie „unu-la-unu”, fie în grupuri mici, pe o perioadă de 12 săptămâni.

Cercetătorii în educație sunt interesați de efectivele claselor, ca urmare a segregării pe criteriul vârstei. Majoritatea cercetărilor sugerează faptul că reducerea numărului de elevi la clasă este importantă în educația timpurie. Chiar dacă cercetările evidențiază avantajul claselor cu efective mici, există sisteme performante cu clase numeroase: în **Coreea de Sud**, raportul profesor/elevi este de 1/35 (media OECD este de 1/17).

În completarea instruirii în școală, foarte mulți elevi sunt înscriși în programul privat „after-school”. Acesta este unul din factorii invocați de rapoartele OECD - PISA ca fiind sursa reușitei celor mai mulți elevi. Lecțiile de matematică și științe au alocate un timp instrucțional standard, iar cursurile avansate sunt gestionate în funcție de caracteristicile fiecărui elev.

În **Franța**, principiul instruirii diferențiate se regăsește în practică. Suportul personalizat pentru cei cu dificultăți în învățarea matematicii se realizează organizat, în cadrul a trei stagii de pregătire în vacanțe. În cele cinci zile din săptămâna școlară, 3 ore pe zi sunt dedicate rezolvării problemelor dificile pentru elevi. Gruparea elevilor este atent realizată, prin prezentarea de către profesor a unui proiect cu un anumit număr de ore, aprobat de către consiliul școlii.

În **Australia**, un studiu video realizat în urma TIMSS - *Third International Mathematics and Science Study*¹⁶ arată că mai mult de trei sferturi din probleme au un grad scăzut de complexitate; cele mai multe probleme vizează *fluența procedurală*, primul din standardele australiene; doar un sfert din probleme are legătură cu viața reală.

În **Japonia**, clasele au efective mari, de 35-50 de elevi, iar instrucția este preponderent frontală. Totuși, principala preocupare este participarea activă la oră, iar timpul folosit pentru expunere sau exersare de deprinderi este redus la minim. Clasa nu este împărțită pe niveluri, deci îi integrează și pe cei cu abilități excepționale. Elevii cu dificultăți de învățare urmează trasee specifice de învățare suplimentară.

¹⁵ Swan, M. *Improving learning in mathematics: Challenges and strategies*. Sheffield, England: Department of Education and Skills Standards Unity, 2005..

¹⁶ Teaching mathematics in seven countries, Results from the TIMSS, Video study from 1999, NCES, 2003.

Studii extrem de interesante sunt cele video. Cele anexate evaluărilor internaționale din 1995 și 1999 și-au propus, descriind modelele de instruire folosite, să identifice atât caracteristicile comune, cât și diferite ale lecțiilor de matematică (forme de organizare, tipologia problemelor, strategii de rezolvare, rolul profesorului etc).

Exemplul 1: Studiul video¹⁷ TIMSS (1995) oferă o imagine comparativă a trei din țările aflate în analiza noastră: Germania, Japonia, și SUA. Este cel mai amplu și ambițios studiu comparativ al practicilor de predare „in vivo” a matematicii, în cadrul a 231 lecții (100 în Germania, 50 în Japonia, 81 în SUA).

S-au remarcat rutine didactice în rezolvarea de probleme, astfel:

- în **Germania**, prezentarea problemei deschide activitatea cu întreaga clasă ghidată de către profesor, centrată pe dezvoltarea unor procedee de rezolvare preferate;
- În **Japonia**, prezentarea problemei pune bazele activității în care elevii soluționează, discută și împărtășesc tehnici de rezolvare;
- În **SUA**, se prezintă problema prin demonstrație de către profesor, urmată de execuția similară a elevilor.

Exemplul 2: Un alt studiu video¹⁸ oferă exemple reprezentative de lecții la clasa a VIII-a, pornind de la criterii legate de coerență, prezentarea problemelor și gradul de participare a elevului. Pe o scară de la 1 la 5, **Japonia** a înregistrat cel mai mare scor, iar **SUA** cel mai mic.

Modelul german	Modelul japonez	Modelul american
- revizuieste materialul anterior, prin tema pentru acasă sau reamintind studenților ce au asimilat până la acel moment; - prezintă tema și problemele din acea zi; - dezvoltă procedeele, ghidând atent elevii în detaliile rezolvării; - exersează procedeele împreună sau individual pe probleme similare.	- revizuieste lecția anterioară printr-un scurt rezumat; - prezintă problema zilei, de obicei, o problemă construită pe cunoștințele recent verificate; - elevii încearcă să rezolve acea problemă, individual sau în grupuri mici; - împărtășesc metodele de lucru celorlalți; - rezumă tema centrală printr-o scurtă prezentare a profesorului.	- reactualizează lecția anterioară prin verificarea temei, - profesorul demonstrează cum se rezolvă un tip de problemă printr-o scurtă demonstrație a punctelor mai importante; - elevii exersează tipul de rezolvare pe un tip similar de problemă; - se verifică modul de rezolvare; - uneori, timpul este folosit pentru începerea temelor în clasă.

Tabel nr. 1. Tipare ale culturii predării, Video Study (1995)

¹⁷ The TIMSS Videotape Classroom Study: Methods and Findings from an Exploratory Research Project on Eighth-Grade Mathematics Instruction in Germany, Japan and the United States U.S. (1999), Department of Education Research Report 1999.

¹⁸ Teaching mathematics in seven countries, Results form the TIMMS, Video study from 1999, NCES, 2003.

În analiza noastră am regăsit similitudini ale lecțiilor germane cu cele japoneze. Diferența principală cu lecțiile americane constă în modul de prezentare a formulelor: în Japonia și Germania formulele sunt dezvoltate în interiorul lecției, în SUA, acestea sunt prezentate într-o formă deja finită. În clasele germane, 23% din conținutul matematic e prezentat, iar 77%, dezvoltat. În cele japoneze, 83% este dezvoltat, iar în clasele americane, situația este chiar opusă.

Deși profesorii din SUA prezintă elevilor probleme de ambele tipuri (exersarea de deprinderi și realizarea de conexiuni între noțiuni), sunt diferiți față de colegii lor internaționali prin faptul că ignoră aspectul conceptual în discuțiile generate de problemă și, de cele mai multe ori, substituie munca elevului cu propria lor activitate. Se pare că aceștia folosesc doar 1% din timp pentru analiza relațiilor matematice. Ca efect al acestor practici, percepția elevilor privind dificultatea conținutului matematic, diferă, așa cum se vede mai jos:

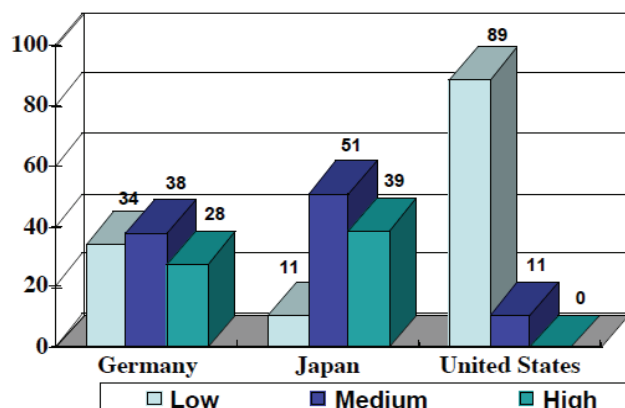


Fig. 2. Percepții asupra gradului de dificultate al lecțiilor de matematică în Germania, Japonia, SUA.

Sursa: The TIMSS Videotape Classroom Study 1999, Department of Education Research Report

Critici:

Constatăm că, la nivel de rezultate ale învățării matematicii, sunt supraestimate fie deprinderile simple, fie înțelegerea conceptuală. În SUA, această discuție a devenit deja istorică (Loveless, 2001; National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001).

Raționamentul științific, ca strategie cognitivă, este corect valorizat în teoriile învățării. Există însă o ruptură intens discutată de pedagogi, între știința și practica instruirii. K. Stacey (2010)¹⁹, în urma unei analize a strategiilor cognitive folosite în 17

¹⁹ Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries
Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M) 2011

țări, conchide că, în realitatea claselor de elevi, raționamentul științific este, de fapt, subreprezentat. În plus, profesorii au nevoie de resurse specifice predării raționamentului matematic. Aplicațiile din manualele americane, de exemplu, sunt deficitare, vizând în special derivarea de reguli ce urmează a fi folosite în exerciții, și extrem de puțin strategii ale gândirii matematice.

Există, în toate contextele analizate, o serie de inovații la clasă. Formele în care acestea se manifestă depind însă de contextul cultural. Studii precum ICMI²⁰, ce vizează cultura matematică în țările occidentale și cele asiatice (Leung, Graf și Lopez-Real, 2006) sau lucrări populare precum *The Learner's Perspective Study* (Clarke, Keitel și Shimizu, 2006), compară practicile de predare din 12 țări. În toate aceste țări, nicio metodă de predare considerată a fi cea mai eficientă, nu apare ca fiind comună.

Profesorul este pus adeseori în situația de a se confrunta cu imprevizibilul, evaluând cu atenție potențialul ideilor elevilor. Aceasta necesită sarcini de învățare reactualizate și adaptate, ghidare, precum și un contract didactic clar. Astfel de elemente nu se regăsesc, în general, în practicile de formare a profesorilor. Se observă dificultățile pe care profesorii le întâmpină, în mare parte din cauza lipsei de pregătire în astfel de strategii noi. Atunci când profesorii pilotează strategii active prin improvizații, nu au niciodată rezultatele așteptate.

²⁰ International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)) este Uniunea Internațională a matematicii, web: <http://www.mathunion.org/ICMI/>.

4. Testările standardizate

4.1. Testările internaționale sunt urmate de studii comparative și de cercetări evaluative naționale privind sursa reușitei/nereușitei.

Statisticile în educația matematică devin instrumente de susținere a unor politici naționale, posibile prin evaluările standardizate ce uniformizează condițiile de testare (standarde, conținuturi, modalități de aplicare etc). Ele permit și analize la scară largă, realizate în scop comparativ, la nivel internațional. Bineînțeles, acestea nu pornesc de la un background cultural similar, astfel încât realitățile evocate să fie înțelese complet: multe caracteristici aparțin tradiției și logicii interne a școlii. Testările standardizate oferă însă dovezi considerate reprezentative pentru competențele cognitive ale elevilor, iar scorurile obținute sunt buni predictorii pentru evoluția acestora.

Într-o publicație a Comisiei Europene se descrie realitatea existentă în multe sisteme de educație²¹: *”Încă tindem să evaluăm în special partea de „cunoștințe” din competențe, în vreme ce „deprinderile” și „atitudinile” esențiale pentru utilizarea creativă a cunoștințelor sunt mult mai dificil de testat în maniera tradițională.”*

O serie de țări angajează schimbări în curriculum în urma evaluărilor sumative. Așa cum se vede în graficele de mai jos, toate țările evocate au înregistrat o creștere notabilă a performanțelor TIMSS între anii 1995 - 2011.

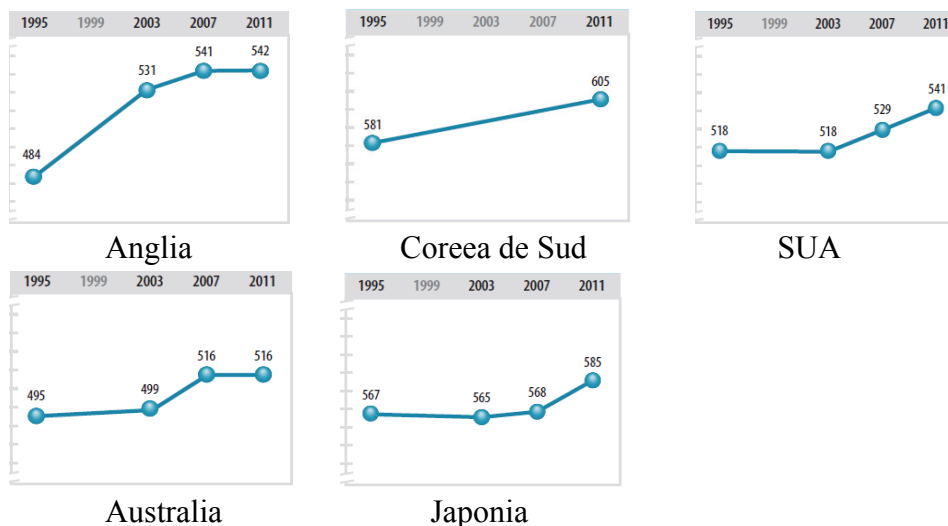


Fig. 3. Performanțele TIMSS la clasa a IV-a. Sursa: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS 2011

²¹ European Commission Joint Research Centre (2009) *Measuring Creativity*, Bruxelles, 2009.



Referitor la performanțele PISA în perioada 2003-2012, nu există variații surprinzătoare, ci progresive. Constant, **Germania** și **Coreea de Sud**, alături de alte 10 țări, au redus ponderea performanțelor scăzute și au crescut ponderea celor înalte.

La matematică și la științe, scorurile sunt inferioare în majoritatea țărilor din Europa. Există însă exemple de bune practici, printre care **Germania**, care, din 2001, a dezvoltat strategii naționale care au făcut posibile progrese de la un ciclu de testare la altul. Se remarcă participarea motivată la studiile comparative internaționale, nu ca simplă prezență în analizele statistice, ci ca exemplu de dezvoltare educațională.

Anglia a participat la toate ciclurile de testare. Referințele internaționale ale evaluărilor sunt tot mai evidente în ultimii ani și se regăsesc în rapoartele de dezvoltare educațională, precum *The Importance of Teaching—The Schools White Paper 2010*. Departamentul de Educație a utilizat informații evaluative din cadrul TIMSS 2007 pentru a promova curriculumul din 2011. Aici, fiecare școală primește rezultatele la teste și, pentru un feedback cu rol motivațional, și rezumatul raportului național.

Testările standardizate au modificat fundamental practicile de instruire. Există riscul ca acestea să vizeze doar rezultatele învățării conform standardelor evaluative, și mult mai puțin, nevoile de dezvoltare ale elevului.

Specialiștii din **SUA** discută în cadre ample despre performanțele elevilor lor la aceste teste și iau decizii centrate pe schimbare în funcție de acestea, în cadrul Common Core State Standards (CCSS). Experții se raportează la modele de curriculum performant,

precum cel din Singapore. Argumentul lor este acela că, adoptând standarde internaționale, absolvenții vor fi capabili să răspundă cerințelor competitive ale pieței muncii.

În **Australia**, rezultatele la TIMSS arată o stagnare de 16 ani. Pentru o țară atât de dezvoltată, nivelul performanței, deși peste media OECD, este considerat inacceptabil. Politicile educației din Australia au ca reper cultura asiatică. 11% din elevii australieni nu ating nivelul minimal al performanței matematice, iar 8%, la științe -

la testele internaționale. Soluția gândită este dezvoltarea practicilor eficiente de predare, începând cu educația timpurie.

În **Franța**, la astfel de teste, elevii francezi obțin puțin peste media de 500 de puncte, considerată acceptabilă la nivel oficial. Aceștia demonstrează în special cunoștințe de geometrie. Au însă dificultăți în a produce raționamente care conduc la generalizări.

Țările asiatice continuă să conducă clasamentele internaționale. **Coreea de Sud**, una dintre țările cu performanțele cele mai ridicate, are, la rândul ei, dezbateri despre riscul ca aceste performanțe să nu reflecte cu acuratețe abilitățile elevilor, ci să depindă de antrenamentul specific testării.

În **Japonia**, rezultate la TIMSS sunt date relevante folosite în materialele de referință despre reformele curriculare, dar și ca suport pentru dezvoltarea practicilor de instruire. Centrul de Studii Naționale TIMSS este situat în cadrul NIER (National Institute for Educational Policy Research, facilitând accesul la toate statisticile existente. Japonia participă la aceste evaluări încă din 1999, dar recunoaște faptul că aceste testări nu au produs progrese notabile în instruirea la clasă.

4.2. Testările naționale oferă feedback și asupra calității curriculumului.

Într-un studiu relativ recent al Comisiei Europene²² se observă că: „*exceptând câteva țări, testarea națională este noua formă de evaluare a elevilor în Europa. Introducerea și utilizarea de teste naționale a început sporadic și a sporit semnificativ mai ales din anii 1990. După 2000, cele mai multe țări au început să se bazeze pe teste în scopul de a monitoriza și a îmbunătăți calitatea educației. În deceniul actual, unele țări se află în faza introducerii acestui sistem de evaluare, iar altele, al căror start s-a produs anterior, își dezvoltă în continuare sistemele naționale de testare*”.

Testările sumative
capătă o importanță
supraevaluată, considerăm noi.
Se întâmplă astfel pentru că
evaluarea normativă are mize
sociale importante: orientarea
profesională, absolvirea și
certificarea.



În **Anglia**, educația obligatorie e de 11 clase (5-16 ani), timp în care elevii dau 4 serii de examene – Key Stage National Curriculum Tests. Rezultatele la teste condiționează continuarea

studiilor. La 7 ani sunt testați la citit, scris și matematică; la 10/11 ani – la citit, scris, matematică și științe; la 13/14 ani – la engleză, matematică și științe. Testările în timpul

²² Eurydice - *National Testing of Pupils in Europe: Objectives Organisation and Use of Result*, Bruxelles, 2009

anului sunt rare. Nu există o metodologie națională privind evaluarea formativă la matematică, ci doar un ghid practic care să răspundă necesităților curente.

Utilizarea testelor elaborate de profesori este cea mai frecventă practică. Legea Reformei în Educație din 1989 a crescut controlul centralizat al curriculumului școlar, dar a consolidat măsurile pentru responsabilizarea școlilor prin evaluarea națională a elevilor.

În **Franța**, primul test național din 1979 a fost implementat pentru a aprecia atât performanța elevilor în raport cu obiectivele programei, cât și diferențele de performanță dintre școli. Evaluarea este extrem de bine proiectată, în toate variantele ei: strategiile inițială, formativă și sumativă și tehnicile de inter-evaluare și autoevaluare. Până la vârsta de 16 ani, elevii trebuie să dezvolte anumite competențe în matematică, conform cadrului comun al celor 7 competențe. Elementele de cultură matematică, științifică și tehnologică sunt evaluate la 8 ani, 11 ani, 15 ani. Se face un bilanț al nivelului de competențe al elevilor. Conform statisticilor, peste 22% dintre elevi nu posedă cunoștințe matematice legate de aplicarea lor în viața curentă. Peste 40.000 de elevi din fiecare an de studiu pot fi etichetați, prin raportare la norme, ca analfabeți-matematic.

În **Australia**, evaluarea națională este cunoscută prin abrevierea NAPLAN²³, derulată anual la clasele III, V, VII and IX, începând cu anul 2008. Nivelul de competență al elevilor la sfârșitul clasei a X-a este modest, comparabil cu alte țări: aceștia dețin cunoștințe relativ simple, cum ar fi descompunerea în factori a unui polinom de gradul al doilea, calculul unor arii sau recunoașterea unor relații de paralelism ori perpendicularitate.

În **Japonia**, SNEA²⁴ analizează nivelul rezultatelor învățării, având ca scop continua optimizare a curriculumului. Performanțele academice sunt evaluate spre sfârșitul anului școlar la nivel național, la limba maternă și matematică, pe eșantioane sau integral, la clasele a VI-a și a IX-a. Evaluarea curriculumului se face înainte și după schimbarea acestuia, la limba maternă, științe sociale, matematică și engleză, pe eșantioane, la clasele V-IX. Statisticile sunt popularizate în presă, astfel încât să fie cunoscută ierarhia școlilor pe baza rezultatelor.

Și în **SUA**, evaluarea este standardizată. Majoritatea itemilor sunt de tip grilă, elevul alegând răspunsul corect din variantele oferite. 25% din subiecte vizează aflarea corectă a răspunsului, validată de demonstrația aferentă. Elevii primesc toate formulele necesare rezolvării subiectelor. Programele eficiente de formare a profesorilor au determinat, în SUA, creșterea rapidă a ponderii elevilor cu performanțe superioare la testările standardizate, de la 25% la 74% la matematică.

²³ National Assessment Program - Literacy and Numeracy

²⁴ Serviciul Național de Evaluare Academică

În **Coreea de Sud**, pentru a evalua calitatea curriculumului național, evaluarea națională²⁵ este realizată anual, rezultatele fiind făcute publice pe site-ul www.schoolinfo.go.kr. Școlile cu performanțe slabe sunt susținute economic de către guvernul coreean. Pentru a fi admiși la universitate, elevii coreeni trebuie să treacă un test de abilități important - College Scholastic Ability Test (CSAT), la terminarea clasei a XII-a. Acesta a devenit normă în selectarea viitorilor candidați. Accesând universități prestigioase, studenților li se oferă oportunități de carieră notabile.

În **Germania**, testarea națională a fost introdusă în 2005, pentru a facilita acordarea de certificate și trecerea la următorul ciclu de învățământ. Valoarea vocațională este evidentă. Examenele sunt proiectate și administrate la nivel local. Certificatul acordat la finele învățământului secundar (Hochschulreife) este cunoscut sub numele Abitur. Posesia unui asemenea certificat constituie o condiție necesară și suficientă pentru admiterea în învățământul superior. Pe lângă limba germană, matematica ocupă un loc central în cadrul acestui examen. Abitur-ul „general” sau „specializat” poate fi obținut la finele Gymnasiumului (anul 13 de studiu), care constituie filiera academică de studiu.

²⁵ National Assessment of Education Achievement (NAEA)

5. FORMAREA PROFESORILOR

În toate sistemele de educație, formarea profesorilor rămâne un aspect critic, intens discutat, în special atunci când sunt explorate efecte cumulative.

Începând cu 2005, rapoartele OECD, ce includ toate țările vizate aici, menționează o serie de tendințe negative în profesia didactică: fenomenul îmbătrânirii, ascendența modelului profesional feminin și slaba corelare între perfecționarea profesorilor și nevoile concrete ale școlilor.

Variațiile în formarea profesorilor sunt efectul opiniilor divergente în comunitatea educațională. Problemele cel mai des invocate fac referire la relația dintre

Tradiția formării academice persistă și în cele mai evolute sisteme. Aceasta este intens corelată cu specificul disciplinei și mai puțin cu didactica aplicată. Totuși, se recunoaște valoarea practicii în țările analizate, întrucât până la 2/3 din formarea inițială este realizată prin practică.

teorie și practică, precum și la importanța disciplinei în raport cu pedagogia aplicată acesteia. De aici, provocarea încă actuală, de a realiza un echilibru între specializare, metodică predării și practica didactică.

Programele de formare a profesorilor de matematică sunt fie simultane, fie consecutive:

- *programele bazate pe simultaneitate* (SUA) oferă,

în același timp, pregătire în specializarea matematică și pedagogie, precum și alte cursuri conexe.

- *formarea consecutivă* presupune parcurgerea studiilor universitare în specializare, urmate de program centrat pe pedagogie și pregătire practică.
- Există și un al treilea tip de programe, foarte popular în SUA, *bazat pe predarea în școală* (*school-based program*).

Calitatea formării este vitală. Studii longitudinale ne arată că performanțele egale ale elevilor la vârsta de 8 ani cresc cu aproximativ 50 % mai târziu, la vârsta de 11 ani, dacă aceștia au profesori bine pregătiți.

În sondajul SITEP²⁶ din 2011, realizat în 37 de țări, trei mari categorii de competențe sunt recunoscute ca fiind vitale, acestea fiind exersate diferit de către profesorii din învățământul primar (*profesori generaliști*) și profesorii din secundar (*profesori specializați*). Acestea sunt:

²⁶ Survey on Initial Teacher Education Programmes in Mathematics and Science, Eurydice, 2011

a. Cunoașterea curriculumului oficial și abilitatea de a predă matematica:

- Creează un spectru larg de situații de predare;
- Utilizează metode bazate pe investigare sau problematizare;
- Utilizează TIC prin simulare pe calculator;
- Explică aspecte socio-culturale asociate matematicii/științelor;
- Folosește tehnici de învățare personalizată;
- Evaluează folosind metode alternative precum portofoliul.

b. Confruntarea cu diversitatea

- Includ în rezultatele învățării o gamă diversă de abilități matematice/științifice;
- Utilizează instrumente de diagnostic pentru identificarea timpurie a dificultăților;
- Analizează convingerile și atitudinile elevilor față de matematică/științe;
- Evită stereotipurile de gen atunci când interacționează cu elevii.

c. Colaborarea cu colegii și cercetarea în domeniu

- Aplică rezultatele cercetării în practica didactică;
- Colaborează cu colegii privind folosirea strategiilor didactice inovative;
- Dirijează cercetarea pedagogică.



Anglia deține cele mai prestigioase școli din Europa. Aici, profesorii stagiați trebuie să promoveze teste de abilități în numerație și TIC, precum și deprinderi de bază necesare pentru asumarea rolului profesional. Ca rezultat al reformei Williams din 2008, programul *Profesorul specialist de matematică* a propus ca până în 2019 să existe câte un specialist în matematică în fiecare școală elementară. Se pune accent pe perfecționarea continuă, cu o cerință obligatorie de 30 de ore pe an. Profesorii sunt invitați să se înscrie în cel puțin una dintre asociațiile profesionale dedicate didacticii matematicii, unde să confirme, prin propuneri inovative, experiența pedagogică, centrată pe demonstrarea abilităților de evaluare, precum și de cercetare aplicativă la clasă. Unul din standardele profesionale este legat de abilitatea de a evalua eficiența predării și identificarea unor zone de dezvoltare²⁷. Cu toate acestea, într-un raport al Royal Academy²⁸, aflăm faptul că „profesorii englezi au mai puțin prestigiu decât colegii internaționali, iar profesia didactică este o opțiune prea puțin tentantă pentru tinerii absolvenți”. Cifrele din 2013 (School Work Force Census) arată că în unele comunități e insuficient numărul profesorilor calificați în matematică, fizică, chimie, informatică, necesarul fiind chiar de 50%. Inițiativele de dezvoltare sunt numeroase.

²⁷ Instituții precum Initial Teachers Education (ITE) furnizează un set de criterii clare pentru aceste autoanalize.

²⁸ Vision for Science and Mathematics Education, The Royal Society Science Policy Centre Report 2014

Centrul Național de Excelență pentru Didactica Matematicii (NCETM) își propune să răspundă aspirațiilor profesorilor de matematică, stimulând învățarea colaborativă din bune practici diseminate la nivel local și regional.

În **SUA**, sistemul de formare este puternic descentralizat. Viitorii profesori urmează studiile de licență în cadrul colegiilor acreditate de 4 ani sau în universități. Licența trebuie să fie obținută în domeniul educației. Un loc important îl deține practica bazată pe observarea lecțiilor de matematică/informatică din liceu și programele de tutoriat. Viitorul profesor de matematică trebuie să participe la examene centrate pe rezolvarea de probleme. Există state care angajează ca profesori persoane licențiate în alte domenii decât cele educaționale, urmând ca, în primii ani de profesie, aceștia să obțină licența în educație. Pentru predarea la liceu, în anumite state, se cere absolvirea unui master în primii ani de carieră didactică. De remarcat, formarea în specializarea matematică nu este obligatorie.

În **Franța**, profesorii sunt formați în universități. În timpul pregătirii, pot face stagii de predare la clasă sub supravegherea unor profesori cu experiență. Ca profesori

Este necesar ca profesorii să conștientizeze faptul că ei înșiși pot genera o cultură a predării/a dezvoltării. Este nocivă obediența acestora atunci când încearcă în mod invariabil să „implementeze” indicațiile experților.

stagiați la terminarea studiilor sunt distribuiți pentru un an într-o instituție școlară, unde sunt monitorizați și susțin o evaluare complexă. Pentru a preda la nivelul gimnaziului, profesorii trebuie să aprobe un examen organizat la nivelul inspectoratului regiunii.

Pentru a preda la nivelul liceului, profesorul francez

trebuie să mai susțină două examene specifice materiei, unul numit CAPES²⁹ și altul numit Agrégation³⁰. Absolvenții demonstrează cunoștințe de bază de matematică și metodică predării matematicii, cunoașterea programelor, dar și o concepție asumată despre rolul matematicii și relația acesteia cu alte discipline. Începând din 2011, pentru a se înscrie la concursurile de titularizare, absolvenții de universități trebuie să aibă studii de master.

În țări precum **Germania** și **SUA**, profesorii de matematică sunt pregătiți și pentru predarea la clasele primare. În școlile secundare, specializarea a devenit o normă,

²⁹ le certificat d'aptitude au professorat du second degré

³⁰ Grad superior, obținut selectiv de către profesorii francezi după absolvirea unui master, care pot preda în licee sau școli superioare

deși în multe cazuri această normă presupune predarea a două obiecte de învățământ, de obicei, matematică și științe.

În **Germania** sunt necesare studii universitare de 5-6 ani, inclusiv, studii masterale, doi ani de stagiatură (*seminarul practic*), urmați de alte două examene de titularizare. Investiția consistentă în formare are ca efect crearea unui statut social remarcabil. Programul de formare este asemănător celui din România, însă există o mai mare pondere de științe sociale și educaționale. Pregătirea în metodică predării matematicii se îmbină cu stagii de practică în școli. Salariile sunt mai mari decât în țările OECD, nu și competitive cu salariile absolvenților de studii superioare din sectorul privat. Totuși, profesia didactică este înalt selectivă, bine recompensată și percepută ca având prestigiu social.

În **Japonia**, profesia didactică are un statut social elevat, aspect reflectat și în procesul de selecție, în cadrul căruia concurează, în medie, 7 solicitanți pe un post. Viitorul profesor urmează un program de formare la universitate structurat pe credite, după care obține un certificat specific nivelului de predare. O parte importantă a acestor programe este reprezentată de practica în școală. După angajare, se face un an de „ucenicie”, supervizată de un profesor cu experiență.

În **Australia**, profesorii obțin diplomă de licență în domeniul matematicii. Pentru a avea și o anumită deschidere culturală, pe lângă cursurile de specialitate, aceștia aleg patru discipline auxiliare dintre: arte media, arte vizuale, dans, dramă, muzică, design și tehnologie, engleză, științe etc. Ulterior, urmează un program masteral (*master of teaching*). Procentul profesorilor de matematică calificați pentru a predă în învățământul secundar este de doar 7%, pe când timpul alocat matematicii în curriculum dublează acest procent. Invocăm aici două aspecte critice: lipsa de pregătire matematică a profesorilor de învățământ primar și nevoia de calificare pentru profesorii de nivel secundar. Există un efort coordonat la nivel național, a cărei primă măsură constă în programul *Teach Next* – pregătirea viitorilor profesori; o alta privește oferta de bonificații profesorilor necalificați pentru a continua studiile.

În **Coreea de Sud**, profesorii sunt absolvenți ai colegiilor de educație de 4 ani sau ai Universității de Educație Națională, în care este obligatoriu un stagiul de practică. După formare, profesorul este calificat ca având gradul al II-lea. Pentru a predă în școlile publice, sistemul de examinări anuale este foarte riguros și realizat în etape, centrate pe conținut științific, cunoaștere pedagogică și proiectarea didactică a activităților. Viitorii profesori sunt selectați din rândul celor mai buni 1/3 absolvenți. Dezvoltarea profesională este o prioritate: cel puțin 10% din timpul profesorului fiind dedicat activităților de perfecționare.

6. MOTIVAREA ÎN ÎNVĂȚAREA MATEMATICII

Există un interes crescând pentru strategii naționale de motivare în învățarea matematicii.

În ultimii ani, o serie de studii educaționale atrag atenția asupra unui declin alarmant în ceea ce privește interesul pentru educația matematică. La nivel mondial, așa cum reiese din (meta)analiza celor mai multe cercetări, deciziile educaționale aplicate pentru combaterea performanței scăzute sunt legate de:

- fixarea fundamentelor în învățarea matematicii (educația timpurie);*
- suport constant pentru diminuarea dificultăților de învățare ale elevilor;*
- stimularea motivației, prin conexiuni cu alte discipline;*
- implicarea părinților în procesul de învățare.*

Diagnoze ale cauzelor ce stau la baza performanțelor sunt rare. Totuși, una din cauzele invocate face referire la motivația slabă pentru învățarea matematicii. În graficul de mai jos, marcate cu roșu regăsim țările în care s-au făcut studii despre motivația în învățarea matematicii.

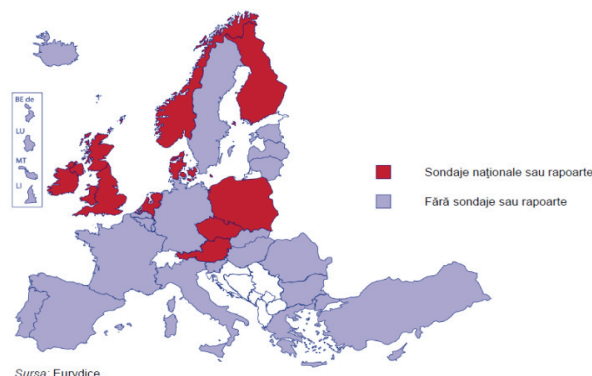


Fig. 5. Cercetări despre motivație în învățarea matematicii. Sursa: Eurydice, 2011

Realitatea demonstrează că nivelul motivației descrește progresiv pe parcursul anilor de studiu. Elevii resimt perioada gimnaziului ca fiind cea mai vulnerabilă. Aceștia își formează acum o imagine despre propriile abilități și interese, ceea ce influențează decisiv performanțele matematice ulterioare. De aceea, motivarea în învățarea matematicii este o adevărată provocare pentru profesori. În plus, resursele de învățare trebuie să fie atractive pentru a reduce efectele cognitive ale demotivării.

Există o literatură amplă dedicată anxietății la ora de matematică. Ultimul studiu asupra testelor PISA (2012), în care apar o serie de opinii ale elevilor despre nivelul de încredere, emoționalitate, conține o statistică relativ asemănătoare: 30 % din cei chestionați manifestă anxietate pe parcursul a cel puțin un an de studiu la matematică. Buckley (2013), în urma analizei mai multor studii, concludă că 20% din populația școlară din SUA este timorată de cerințele acestei discipline.



În **Germania** și **Franța** s-au înregistrat cele mai mari niveluri de anxietate, conform statisticilor OECD din 2004. Aceleași țări însă sunt recunoscute pentru interesul crescut față de competițiile la nivel național. În **Germania**, acestea sunt organizate în timpul anului școlar, de-a lungul a trei sesiuni. În **Franța** există peste 20 de astfel de concursuri.

În **Coreea de Sud**, elevii asimilează cunoștințe organizate în jurul temelor de evaluare, fără a demonstra un interes intrinsec. Deși **Coreea de Sud** are performanțe notabile la evaluările TIMSS și PISA, atitudinea față de matematică nu este una pozitivă, conform studiilor calitative care au însoțit aceste evaluări. În plus, există o diferență imensă între rezultatele din mediul urban și cel rural, în special din cauza diferenței de atitudine.

Eșecul școlar are oriunde în lume un efect cumulativ: de exemplu, în **Anglia**, elevii care eșuează la 11 ani, au 25% șanse să reușească la 14 ani și 6% șanse să reușească la 18 ani. Rolul motivațional al instruirii este vital; nu este importantă vârsta la care copilul începe școala. În țările în care școala începe la vârsta de 7 ani, elevii obțin rezultate foarte bune la matematică la vârsta de 15 ani.

Traseele diferențiate au, de asemenea, un rol de stimulare a motivației în învățare. În **SUA**, NSF a propus demararea unor proiecte matematice suplimentare care să susțină elevii și profesorii în alegerea strategiei eficiente pentru atingerea standardelor educaționale: pentru gimnaziu, *Connected Mathematics* (6-8), *MathScape*, *MATHThematics-STEM* (6-8) etc.; la nivel de liceu: *Contemporary Mathematics in Context* (9-12), *Matematici interactive* (9-12), *MATH Connections* (9-11), *Mathematics: Modeling Our World (ARISE)* (9-12), *SIMMS Integrated Mathematics: A Modeling Approach Using Technology* (9-12).

Australia este recunoscută pentru gradul de încredere al elevilor în competențele matematice (78%), peste media internațională (76%).

Prestigiul mondial este un obiectiv național. 20% dintre premianții Fields, echivalentul premiului Nobel în matematică, provin din **Franța**. Până în 2013, 11 dintre cei 52 de medaliați erau francezi. Rolul ENS - Școlii Normale Superioare este fundamental în acest sens. Performanțele echipelor **SUA** la concursuri și olimpiade sunt foarte bune în ultimii ani. Echipa **SUA** se află printre câștigătorii recentii ai Olimpiadei Internaționale de Matematică.

Măsurile cu rol motivațional cel mai des aplicate în sistemele de educație amintite vizează parteneriate cu universități, stagii de practică în companii, activități educative în afara școlii etc.

6. UTILIZAREA TEHNOLOGIEI

Crește interesul pentru utilizarea TIC în educația matematică.

Tehnologia oferă oportunități multiple de proiectare și utilizare a aplicațiilor de învățare în orice disciplină școlară. Deși argumentele pentru utilizarea TIC în învățare sunt multiple, toate aceste valorizări sunt condiționate de modul în care sunt respectate principiile de proiectare a învățării. Și în domeniul matematicii, TIC poate transforma ideile în „materie”; de asemenea, face posibilă înregistrarea activității/produsului ei și are un potențial adaptativ apreciat de către profesori prin alerte cu rol de feedback imediat, alternative și răspunsuri selective.

Posibile avantaje TIC în educația științifică:

colectare de date pentru proiecte științifice; interacțiuni virtuale cu alți elevi, profesori, specialiști; simulări și modelări, rotația și manipularea obiectelor; măsurarea; dinamica relațiilor dintre componente; organizare și reprezentare grafică (sisteme de cartografie și topografie, sisteme economice, meteorologice, etc.); experimentarea unor fenomene fizico-chimice care sunt imposibil de realizat; exploatarea unui model în care anumite elemente sunt parametri variabili și prin care se modifică calitățile intrinseci ș.a.

Adeseori, elevii pot folosi resursele digitale ca „proteză” cognitivă, ca suport pentru sarcini pe care aceștia ar trebui să le realizeze în mod autonom. Calitatea resurselor digitale și medierea profesorului sunt vitale în acest sens.



Folosirea calculatoarelor în **Australia** are o frecvență considerabilă. Conform raportului național TIMSS 2007, dacă în clasa a IV-a, 95% din elevii

folosesc calculatoarele la ora de matematică, în clasa a VIII-a, procentul crește. Pentru 99 % din elevi, matematica este predată în clasă și nu în laborator, iar calculatoarele sunt instrumente uzuale folosite pentru a verifica corectitudinea răspunsurilor, a rezolva probleme și a dezvolta concepte matematice. *Digital Education Revolution* este instituția care contribuie la integrarea tehnologiei în școli.

În **Anglia**, introducerea tehnologiei este prevăzută în curriculumul matematic național. Este asigurat accesul la Internet, există suport tehnic generalizat. Numărul calculatoarelor per elev variază la nivel regional. Tabla interactivă este însă foarte populară în rândul tuturor profesorilor și elevilor.

În **Japonia**, este vital ca elevii să dezvolte abilitatea de a răspunde în mod autonom solicitărilor unei societăți cu o tehnologie avansată. În 2004, *e-Japan Priority Policy Program Plan* cerea tuturor școlilor să dețină calculatoare și acces la Internet până în 2005. În 2011, școlile din Japonia aveau un calculator la 6 elevi și 82% din clase

aveau conexiune LAN. Programul *The Course of Study for Lower Secondary Schools* conține direcții de optimizare a activităților de învățare prin TIC. Elevii își formează abilități digitale prin folosirea abacului – *soroban*, urmând ca, în școala secundară, să devină competenți din punct de vedere digital la nivelul tuturor disciplinelor (pentru documentare, procesare de date, observare, înregistrarea măsurărilor în cadrul experimentelor).

În **Franța** au fost create ghiduri metodice pentru profesori în vederea utilizării instrumentelor TIC la matematică. Există un interes deosebit pentru aplicații digitale de rezolvare a problemelor cu cerințe matematice, dar care provin din alte domenii și care pun accent pe înțelegerea rezolvărilor și interpretarea rezultatelor.

În **Germania** nu există o politică națională unitară privind integrarea TIC în educație. Echipamentele informatice sunt disponibile în 2/3 din școli. În cele mai multe landuri, curriculumul matematic include și câteva direcții privind utilizarea calculatoarelor. Manualele de matematică din ultimii ani fac apel la TIC prin softurile analogice dedicate acestora, profesorii având libertatea de a include în lecții aceste aplicații. Profesorii încurajează elevii să folosească calculatoarele, dacă, bineînțeles, software-ul nu contrazice concepția curriculumului. Aici a fost inclusă o disciplină nouă, *Media ca sursă de informare*.

În **Coreea de Sud**, utilizarea TIC este un obiectiv ferm în educația matematică, concretizat în ponderea obligatorie de 10-20% din durata lecției. Calculatoarele sunt recomandate nu doar pentru a efectua calcule complexe, ci pentru a dezvolta gândirea elevului prin înțelegerea conceptelor, principiilor și legităților și rezolvarea de probleme.

În **SUA**, utilizarea tehnologiei a cunoscut un proces de expansiune în ultimii ani. Dacă în 2000, vorbim de un raport de 1 calculator/7 elevi, în 2008, raportul este de 1/3. Încă din 2009, 94% din școlile publice aveau acces la Internet. Aici este deja legitimă ideea conform căreia TIC are un impact deosebit, în primul rând, asupra modului în care se poate desfășura instruirea la clasă.

CONCLUZII

Sintetizând, constatăm că educația matematică are un scop comun declarat la nivel mondial: *să construiască o cultură necesară înțelegerii vieții și societății*. Fundamentul educativ al școlii constă în transmiterea acestei culturi matematice tuturor elevilor, ca parte a unui capital social.

În urma explorării noastre în aceste spații educative, concluzionăm că:

1. Orice curriculum național, oricât de altruist ar fi, nu este un panaceu. Acesta poate fi corect proiectat, conform unor principii științifice; definatorii sunt practicile educative.
2. Cultura matematică este corelată cu educația științifică și dezvoltarea tehnologică, obiective importante ale sistemelor de educație din lume.
3. În sistemele analizate, există o corespondență între curriculum și evaluare, cel puțin la nivelul proiectării lor. Eforturi remarcabile sunt orientate către optimizarea acestora.
4. În fiecare spațiu educativ, criticile cele mai vehemente vin din interiorul comunității educaționale. Vocea profesorului este însă bine reprezentată prin organizații profesionale și societăți științifice.
5. Schimbările în curriculumul matematic au ca fundamente standardele testărilor internaționale dar și, mai important, cerințele pieței muncii, în scopul creșterii competitivității.
6. Cercetarea educațională este un reper în dezvoltarea curriculumului matematic. Am remarcat peste tot același paradox: diferitele inovații nu sunt clar demonstrate *in vivo* în rutinele didactice, deși ele apar constant în discursul pedagogic (al specialiștilor) și declarativ (al profesorilor).

Anexa 1.

Exemple de programe matematice pentru învățământul secundar: SUA, JAPONIA, COREEA DE SUD, FRANȚA.

Statele Unite ale Americii

Domeniul	Justificarea domeniului	Conținuturi/standarde de performanță
1. Numere și cantități	Conștientizarea folosirii unităților în modelare și aplicarea în viața de zi cu zi: accelerația, conversia valutară, temperatura zilnică, estimări de tipul “per-capita”.	1. <i>Sistemul numerelor reale</i> : să înțeleagă extinderea exponenților de la numere întregi la numere raționale și să poată folosi proprietățile numerelor raționale și iraționale.
		2. <i>Cantități</i> : să poată raționa “cantitativ” și să poată folosi unități în rezolvarea problemelor.
		3. <i>Sistemul numerelor complexe</i> <i>Standarde minimale</i> : să opereze cu numere complexe (fără împărțire), să rezolve ecuații de gradul al II-lea cu coeficienți reali, dar cu soluții complexe; <i>Standarde superioare</i> : să opereze cu numere complexe, să lucreze cu numerele complexe sub formă trigonometrică, să folosească numerele complexe în identități polinomiale și ecuații.
		4. <i>Cantități reprezentate vectorial și matriceal</i> : să reprezinte și să modeleze diferite cantități folosind vectori, să opereze cu vectori, cu matrici și să le poată folosi în aplicații.
2. Algebra	Modelarea fenomenelor de zi cu zi prin ecuații și inecuații și aproximarea soluțiilor unei ecuații folosind grafice. Rezolvarea unei ecuații, inecuații sau a unui sistem.	1. <i>Observarea structurii expresiilor</i> (să interpreteze structura unor expresii, să rescrie unele expresii în formă echivalentă pentru a rezolva probleme).
		2. <i>Aritmetica polinoamelor și expresiilor raționale</i> : să facă calcule cu polinoame, să înțeleagă relația dintre zerourile și factorii unui polinom, să folosească identități polinomiale în rezolvarea problemelor, să rescrie expresiile raționale în forme echivalente.
		3. <i>Crearea ecuațiilor care descriu numere și relații</i> : să reprezinte diferite “constrângeri” din viața de zi cu zi în termeni de ecuații sau sisteme de ecuații și inecuații).
		4. <i>Raționamente cu ecuații și inegalități</i> : să înțeleagă rezolvarea ecuațiilor în urma unui raționament, să rezolve ecuații și inecuații de o singură variabilă, să reprezinte ecuațiile și inecuațiile folosind graficele.
3. Funcții	Interpretarea fenomenelor ca funcții și “citirea” caracterului lor liniar, pătratic sau exponențial sau identificarea a două funcții ce au aceleași valori în anumite puncte, folosind metode grafice.	1. <i>Interpretarea funcțiilor</i> : să înțeleagă conceptul de funcție și să folosească notația funcțională, să interpreteze funcțiile care apar în diferite aplicații în contextul respectiv, să analizeze funcțiile ce apar în diferite reprezentări.
		2. <i>Construirea funcțiilor</i> : să construiască o funcție care să modeleze relația dintre două cantități, să poată construi o nouă funcție dintr-o funcție dată.
		3. <i>Modelele liniare, pătratice și exponențiale</i> : să poată construi, compara și interpreta cele trei modele și să rezolve probleme.
		4. <i>Funcțiile trigonometrice</i> : să extindă domeniul funcțiilor trigonometrice folosind cercul unitate, să modeleze fenomene periodice ce apar în viața reală folosind funcții trigonometrice, să demonstreze și să aplice identitățile trigonometrice de bază).

4. Modelare matematică	Dezvoltarea capacității de a modela matematic fenomene ce apar în viața reală.	Identificarea variabilelor esențiale, formularea unui model folosind metode geometrice, grafice, tabulare, algebrice sau statistice, analiza relațiilor obținute, interpretarea rezultatelor matematice obținute în termenii situației inițiale, validarea concluziilor prin compararea cu situația inițială și, eventual, îmbunătățirea modelului. <i>Exemple:</i> ce cantitate de hrană este necesară pentru un oraș cu o populație de 3 milioane de oameni, devastat de un cataclism natural; planificarea unui turneu de tenis de masă la care participă 7 persoane, care joacă fiecare cu fiecare, având la dispoziție doar 4 mese; analiza distanței de frânare a unei mașini etc.
5. Geometrie	Formalizarea “experienței” geometrice din școala gimnazială folosind definiții mai precise și raționamente mai profunde. Folosirea transformărilor geometrice (translații, rotații sau simetrii) contribuie la dezvoltarea abilităților de identifica forme echivalente în viața de zi cu zi.	1. <i>Congruențe:</i> să folosească transformările planului, să înțeleagă congruența în termeni de “mișcări” rigide, să demonstreze câteva teoreme clasice privind unghiurile, să poată face construcții elementare cu rigla și compasul. 2. <i>Asemănare, triunghiuri dreptunghice și trigonometrie:</i> să înțeleagă asemănarea în termeni de omotetii, să demonstreze teoremele Thales și Pitagora folosind asemănări, să definească rapoarte trigonometrice și să rezolve probleme cu triunghiuri dreptunghice. 3. <i>Cercul:</i> să înțeleagă și să aplice teoremele clasice despre cerc, să deducă, folosind asemănarea, lungimea unui arc și aria unui sector de cerc. 4. <i>Exprimarea unor proprietăți geometrice folosind ecuațiile:</i> să reformuleze proprietățile geometrice ale secțiunilor conice în termeni algebrici folosind ecuațiile, să utilizeze coordonatele pentru demonstrarea algebrică a unor fapte geometrice simple. 5. <i>Măsurări geometrice. Dimensiune:</i> să înțeleagă formulele de volum și să le folosească pentru a rezolva probleme, să “vizualizeze” legăturile dintre obiectele bidimensionale și cele tridimensionale, de exemplu cazul secțiunilor plane în corpuri din spațiu. 6. <i>Modelarea fenomenelor folosind geometria:</i> să folosească forme geometrice, măsurile și proprietățile lor pentru a descrie obiecte din natură, să folosească figuri geometrice plane sau spațiale în probleme de design.

Japonia

Clasa	Conținuturi/obiective de învățare
aV-a –aVI-a	Paritate; factori și multipli; scrierea zecimală; operații cu numere zecimale; operații cu fracții; proprietăți ale operațiilor. Calcularea ariei pentru triunghiuri și patrulatere speciale; unități de măsură pentru volum și calcularea acestuia; aria cercului; estimarea ariei unor figuri prin aproximarea lor cu figuri familiare; calcularea vitezei. Recunoașterea unor poligoane regulate; recunoașterea congruenței; înțelegerea reprezentării la scară; înțelegerea simetriei. Proportionalitate; procente și reprezentarea lor grafică (bare sau cercuri); reprezentarea numerelor prin litere; analiza statistică a datelor: medie, frecvență.
aVII-a	Numere negative: calculul cu acestea, folosirea lor în practică; folosirea literelor în calcule; calcul literal; ecuații: rezolvare, folosire în rezolvare de probleme.

	Bisectoare, mediatore, perpendiculară, translație, simetrie, rotație; reprezentarea plană a unui corp: desen, desfășurare; sector de cerc: arie, lungime; aria și volumul unei piramide sau sfere. Relația de proporționalitate directă/inversă ca relație funcțională. Organizarea datelor în tabele și grafice, folosind calculatorul
aVIII-a	Calcul polinomial; sisteme liniare de două ecuații. Proprietăți de paralelism; unghiurile unui triunghi; congruența triunghiurilor; demonstrații, verificarea prin demonstrație a proprietăților unei figuri. Funcții liniare; probabilități în cazuri simple
aIX-a	Rădăcina pătrată: calcule, situații de folosire; formule de calcul prescurtat; descompunere în factori; ecuații de gradul II. Triunghiuri asemenea; paralelism și rapoarte; reprezentări la scară – arii și volume; unghiuri în cerc; teorema lui Pitagora. Funcții de forma $y = ax^2$. Deducerea tendințelor într-o populație statistică, din folosirea unor eșantioane.
X-XII cursul superior	Matematică I (pentru toți) : funcții pătratice; rapoarte trigonometrice; șiruri; combinatorică; probabilități. Matematică II: funcții exponențiale; funcții trigonometrice; geometrie analitică (drepte și cercuri); conceptele de limită, derivată și integrală definită. Matematică III: funcții și limite; șiruri și serii geometrice; calcul diferențial și integral Matematică A: expresii algebrice; egalități și inegalități; geometrie plană; șiruri; inducție matematică; binomul lui Newton; folosirea calculatorului pentru calcul. Matematică B: vectori; numere complexe și planul complex; distribuții probabilistice; algoritmi Matematică C: aritmetica matricelor; sisteme de ecuații liniare; conice; coordonate polare; analiză numerică; statistică bazată pe folosirea analizei matematice.

Coreea de Sud³¹

Clasa aV-a

NO	A	divizori și multipli; simplificare și amplificare; adunare și scădere de fracții cu numitori diferiți; înmulțirea fracțiilor
	B	înmulțirea și împărțirea fracțiilor ordinare și zecimale
FG	A	paralelipipedul dreptunghic și cubul; percepție spațială
	B	congruență și simetrie
M	A	perimetru; arie
	B	unități diverse; arii diverse

³¹ Curriculumul comun are 6 domenii: numere și operații; figuri geometrice; măsurare; probabilități și statistică; litere și expresii; tipare și funcții, împărțite, în fiecare clasă, în două părți. Conținuturile au fost reduse în ultimii ani. .

PS	B	reprezentarea datelor
LE	A	rezolvarea de probleme
	B	rezolvarea de probleme
TF	A	construirea de figuri regulate

Clasa aVI-a

NO	A	fracții ordinare și zecimale
	B	împărțirea fracțiilor ordinare și zecimale
FG	A	proprietățile prisme și piramidei; percepție spațială
	B	alte figuri în spațiu
M	A	suprafețe și volume; măsurări
	B	numărul π și aria cercului; aria și volumul cilindrului
PS	B	numărul de realizări ale unui eveniment și probabilitate
LE	A	rezolvarea de probleme
	B	rezolvarea de probleme
TF	A	raport și rată; proporționalitate
	B	tipare și corespondențe; șir de rapoarte egale și proporționalitate

Clasa aVII-a

NO	A	mulțimea numerelor naturale; sistem zecimal și binar; numere întregi și raționale
	B	figuri geometrice de bază; construirea și congruența figurilor; proprietățile figurilor plane; proprietățile figurilor din spațiu
M	B	poligoane și măsura unghiurilor; lungimi, arii și volume de figuri geometrice
PS	B	reprezentarea grafică a unei distribuții; frecvență relativă; frecvență cumulată
LE	A	folosirea literelor în expresii; ecuații; folosirea ecuațiilor
TF	A	funcții și grafice; folosirea funcțiilor

Clasa aVIII-a

NO	A	numere raționale
FG	B	proprietățile triunghiurilor și dreptunghiurilor; asemănarea; aplicații ale asemănării
M	B	aproximare și eroare; adunarea și scăderea
PS	B	proprietăți de bază ale probabilităților
LE	A	calcularea de expresii; sisteme de ecuații cu două necunoscute; folosirea sistemelor de ecuații; inecuații liniare și sisteme de inecuații liniare; folosirea sistemelor
TF	A	funcții liniare și grafice; folosirea funcțiilor liniare

Clasa a IX-a

NO	A	rădăcina pătrată; numere reale; calcularea expresiilor
FG	B	teorema lui Pitagora; cercul – proprietăți, unghiuri
M	B	rapoarte trigonometrice
PS	B	diagrame de variabile corelate
LE	A	înmulțirea și descompunerea polinoamelor; ecuații pătratice; folosirea ecuațiilor pătratice
TF	A	funcții pătratice și graficele lor

Clasa a X-a

NO	A	operații cu mulțimi și propoziții; numere reale; numere complexe
FG	B	coordonate în plan; ecuația dreptei; ecuația cercului; deplasări în plan
M	B	regiunea de valabilitate a unei inegalități
PS	B	deviere standard
LE	A	operații cu polinoame; descompunerea, divizorii și multiplii polinoamelor; expresii raționale și iraționale; ecuații și inegalități
TF	B	funcții și folosirea lor; funcții raționale și iraționale, funcții trigonometrice și graficele lor; folosirea funcțiilor trigonometrice

Franța (parcursul Seriei Științifice, nivel liceal)

Nivelul	Conținuturi
Seconde	1. Funcții: domeniu de definiție, domeniul valorilor, imaginea curbei, funcții cu valori puncte; funcții crescătoare, descrescătoare, maxim și minim pe un interval pentru o funcție. Rezolvarea grafică și algebrică a ecuațiilor. Funcția de gradul I, funcția de gradul II, funcții omografice; Rezolvarea algebrică și grafică a inecuațiilor ce implică astfel de funcții. Funcția inversă. Trigonometrie, funcții trigonometrice și valorile acestor funcții. Geometrie: Coordonatele unui punct în plan, distanța dintre două puncte, mijlocul unui segment, triunghiuri, patrulatere, cercuri prin intermediul coordonatelor. Dreapta, ecuația drepte, drepte paralele, drepte secante. Vectori în plan, suma vectorilor, înmulțirea vectorilor cu un scalar. Relația lui Chasles. Geometrie în spațiu: paralelipiped drept, piramide, con și cilindru de revoluție, sfera. Poziția relativă a dreptelor și a planelor în spațiu. Drepte și plane paralele. Statistică și probabilități: Statistica descriptivă și analiza datelor. Eșantion. Eșantionizarea unor date statistice. Probabilitate pentru mulțimi finite. Probabilitatea unui eveniment.
Première	Analiză: pornind de la o funcție dată $u(x)$, cum arată $u + k, ku, \sqrt{u}, \frac{1}{u}$; derivarea funcțiilor elementare, șiruri numerice simple. Geometrie: ecuația drepte și consecințe; Elementele de trigonometrie: noțiunea de radian, funcțiile sinus și cosinus pentru unghiuri măsurate în radiani, folosind produsul scalar și teorema lui Pitagora generalizată, exprimată prin produs scalar și norme, se ajunge la demonstrarea lui $\cos(a - b)$. Statistică și probabilități: dispersia, variabilele aleatoare discrete și diverse legi de probabilitate. Schema Bernoulli, legea binomială, coeficienți binomiali, triunghi Pascal, eșantionare. Utilizarea calculatorului și a softurilor specializate conduc la înțelegerea noțiunilor de intrare, ieșire, calcul, scrierea unui program care efectuează un calcul, problematica calculului iterativ, instrucțiuni condiționale.
Terminale	Analiză matematică, Geometrie: Numere complexe, Geometrie în spațiu, probabilități și statistică. Limita finită și infinită a unui șir (cu definiția). Compararea șirurilor și a limitelor lor. Criterii de comparație. Operații cu limite. Șiruri majorate, minorate, șiruri mărginite. Limite de funcții. Asimptote. Interpretări geometrice. Continuitate și Proprietatea lui Darboux. Complemente la calculul derivatelor, derivatele funcțiilor compuse. Funcțiile sinus și cosinus, proprietăți diferențiale ale lor. Funcția exponențială (ca unică funcție derivabilă care are proprietatea că este egală cu derivata sa și $f(0)=1$). Proprietăți ale funcției exponențiale. Funcția logaritmică neperiană. Integrala unei funcții continue și pozitive ca aria de sub curbă. Noțiunea de primitivă a unei funcții continue și pozitive. Calcul de primitive. Teorema de medie pentru integrala definită. Geometrie: numere complexe și geometrie în spațiu: Forma algebrică a unui număr complex. Conjugatul unui număr complex. Reprezentare în plan. Rezolvarea în $\mathbb{C}$ a ecuației de gradul doi. Modul, argument restrâns, argument, aplicații. Relația lui Euler. Aplicații algebrice. Drepte și plane în spațiu, intersecție și paralelism. Ortogonalitate în spațiu: dreapta, dreapta; dreapta, plan; plan, plan. Vectori coplanari, reper, reprezentare parametrică a unei drepte. Ecuații ale planelor și dreptelor în spațiu. Exerciții. Explicitarea noțiunilor anterioare via ecuațiile dreptelor și planelor în spațiu. Vizualizări 3D. Probabilități și statistică Probabilități condiționate. Evenimente independente. Legea de densitate și aplicații: trecerea de la noțiunea de probabilitate privită ca frecvență la probabilitate definită prin arii sau volume. Media unei variabile aleatoare care urmează o lege uniformă. Metoda Monte Carlo. Legi exponențiale. Legea normală. Teorema Moivre-Laplace. Legea normală pătratică. Intervale de fluctuație. Intervale de fluctuație asimptotice. Estimare. Marja de eroare la un eveniment cu probabilitate cerută. Algoritmi în limbaj uzual sau în limbaj simbolic. Materia din Terminale poate fi aprofundată prin studiul unor probleme speciale împărțite în două subdomenii: aritmetică și matrici.

Bibliografie

1. Comisia Europeană. (2011), *Învățământul matematic în Europa: Provocări comune și politici naționale*, Agenția Executivă pentru Educație, Audiovizual și Cultură, EACEA P9 Eurydice.
2. Eurydice. (2009), *National Testing of Pupils in Europe: Objectives Organisation and Use of Result*, Brussels.
3. European Commission. (2009), *Measuring Creativity*, Joint Research Centre Brussels.
4. González, O. (2012) *Secondary Mathematics Teachers' Professional Competencies For Effective Teaching of Variability-Related Ideas: A Japanese Case Study*, Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8).
5. Grigutsch, S. (1998), *On pupils' views of mathematics and self-concept: developments, structures and factors of influence*. în E. Pehkonen & G. Törner (Eds.) *The state-of art in mathematics-related belief research. Results of the MAVI activities*. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research report.
6. Hiebert, J. Stigler, J. (2004), *A world of difference Mathematics and Science*. 25/4,
7. Lew, H.C (2011), *Current Issues for Mathematics Curriculum Reform in Korea*, Korea National University of Education, APEC Tsukuba Conference, Tokyo.
8. Mastrull, S. (2002), *The Mathematics Education of Students in Japan: A Comparison with United States Mathematics Programs*, Bristol Township School District, MIC 8 Training.
9. Mee, P.K., (1997), *School Mathematics Curriculum in Korea*, Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D, Research in Mathematical Education, Vol. 1, No. 1.
10. Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Minnich, C.A., Stanco, G.M., Arora, A., Centurino, V.A.S., & Castle, C.E. (2011), *TIMSS Encyclopedia: Education Policy and Curriculum in Mathematics and Science, Volumes 1 and 2*, Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
11. Nagasaki, E. (2012), *Mathematical Literacy For Living in the Highly Information-and-Technology-Oriented in the 21st Century: Mathematics Education from the Perspective of Human Life in Society*, 12th International Congress on Mathematical Education, COEX: Seoul.
12. National Center for Education. (2003), *Teaching mathematics in seven countries, results from the TIMMS*, Video study from 1999.
13. National Center for Education, *The TIMSS Videotape Classroom Study: Methods and Findings from an Exploratory Research Project on Eighth-Grade Mathematics Instruction in Germany, Japan, and the United States U.S.* (1999), Department of Education Research Report.

14. National Science Foundation – MT-2. (2007), *The preparation gap: teacher education for middle school mathematics in six countries USA*.
15. OECD. (2015), *Regards sur l'éducation 2015: Les indicateurs de l'OCDE*, Éditions OCDE.
16. OECD. (2009), *Education at a Glance*, OECD Indicators.
<http://www.oecd.org/education/skills-beyond-school/43636332.pdf>
17. OECD. (2004), *Learning for Tomorrow's World – First Results from PISA 2003*. Paris. <http://www.oecd.org/dataoecd/1/60/34002216.pdf>
18. Sullivan, P., *Teaching Mathematics: using informed teaching strategies*, ACER Press, 2011.
19. Rezat, S. (2006), *The structures of German mathematics textbooks*, Springer Publishing New York.
20. Swan, M. (2005). *Improving learning in mathematics: Challenges and strategies*. Sheffield, England: Department of Education and Skills Standards Unit.
21. Royal Society. (2014), *Vision for Science and Mathematics Education*, Policy Centre Report.
22. Takahashi, A., Watanabe, T., Yoshida, M., (2008), *English Translation of the Japanese Mathematics Curricula in the Course of Study*, Staff Development Council in Utsunomiya University
http://ncm.gu.se/media/kursplaner/andralander/Japanese_COS2008Math.pdf
23. Tatto, M.T. (2011), *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries. Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics*
24. UNESCO. (2012), *Challenges in basic mathematics education*.
<http://www.nysedregents.org/>
www.maths-et-tiques.fr/index.php/programmes
media.education.gouv.fr/file/30/52/3/programme_mathematiques_seconde_65523.pdf
[http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/GERMANY%20\(R-P\)%20country%20profilev_FINAL.pdf](http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/GERMANY%20(R-P)%20country%20profilev_FINAL.pdf)
<http://www.nap.edu.au/naplan/naplan.html>
<http://www.australiancurriculum.edu.au/mathematics/curriculum/f-10?layout=1>
http://www.acara.edu.au/verve/_resources/Australian_Curriculum_-_Maths.pdf
http://www.huffingtonpost.com/2014/09/02/50-states-common-core_n_5751864.html
<http://www.history.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/meg/>
http://www.educationworld.com/a_admin/admin/admin074.shtml
http://page.mi.fu-berlin.de/bhrnds/publ_papers/smf_gazette_121_101-106.pdf
media.education.gouv.fr/file/30/52/3/programme_mathematiques_seconde_65523.pdf
cache.media.education.gouv.fr/file/skkpecial_9/21/1/mathsS_155211.pdf

Lista tabelelor

Tabel nr. 1. Patternuri ale culturii predării, Video Study (1995)

Lista figurilor

Fig. 1. Percepția elevilor asupra importanței matematicii, științelor și lecturii. PISA 2006

Fig. 2. Percepții asupra gradului de dificultate al lecțiilor de matematică în Germania, Japonia, SUA.

Fig. 3. Evoluția performanțelor TIMSS la clasa a IV-a.

Fig. 4. Cercetări despre motivație în învățarea matematicii. Sursa Eurydice, 2011

ANEXA 2. STUDIUL 2

EDUCAȚIA MATEMATICĂ DIN ROMÂNIA

Studiu-diagnoză 2016

Coordonator: conf. univ. dr. Silvia Făt

Autorii, în ordine alfabetică: prof. Mihail Bălună,
prof. univ. dr. Wladimir Boskoff, conf. univ. dr.
Cătălin Gherghe, prof. univ. dr. Radu Gologan,
prof. univ. dr. Doru Ștefănescu.



CUPRINS

I. Introducere	3
II. Diagnoza educației matematice în România.....	4
1. Rolul educației matematice	4
2. Curriculumul matematic	7
3. Practicile de instruire	13
4. Evaluarea performanțelor	16
5. Formarea profesorilor	20
6. Motivarea în învățarea matematicii	24
7. Utilizarea tehnologiei	28
III. Concluzii	
Lista figurilor	

I. Introducere

Studiul de față își propune să descrie educația matematică din România, un fenomen aflat constant între proiect și realitate. Cu toate că există un mare scepticism în a formula pozitiv răspunsuri la problemele existente, încercarea noastră rămâne una constructivă, orientată spre soluții, intens motivată de nevoia de schimbare pe care o resimt profesorii din România. Pornim de la interogațiile lansate în studiul anterior, „*Tendențe ale educației matematice în lume*”:

- Există o concepție coerentă în educația matematică din țara noastră?
- Ce impact are educația matematică asupra carierei absolventului?
- Ce tip de matematică se promovează, matematica algoritmică sau cea creativă?
- În ce măsură este integrată tehnologia în educația matematică?
- Cum este apreciată formarea profesorilor?
- Ce strategii sunt folosite în practica educativă?
- Ce impact au evaluările asupra traseului școlar/profesional al elevului?

Diagnoza fenomenului educațional este o analiză complexă, care integrează date din surse multiple, complementare. Am utilizat câteva tehnici de colectare a datelor în cadrul unor: discuții pe grupuri tematice, organizate în cadrul unui atelier de lucru (participanți: 20 profesori din învățământul preuniversitar, 6 profesori din învățământul universitar și un reprezentant al Institutului de Științe ale Educației); a unor discuții structurate pe facebook-SSMR.mat.edu, creat în acest scop; a unei anchete pe bază de chestionar (respondenți: 340¹ profesori de matematică din învățământul preuniversitar). Profilul general al participanților reiese din graficele de mai jos: gen preponderent feminin (85,2%), practicieni pentru învățământul primar, gimnazial și liceal (în medie, peste 30%), majoritatea cu o experiență la catedră mai mare de 10 ani (82,1 %) și gradul didactic I (peste 74%).

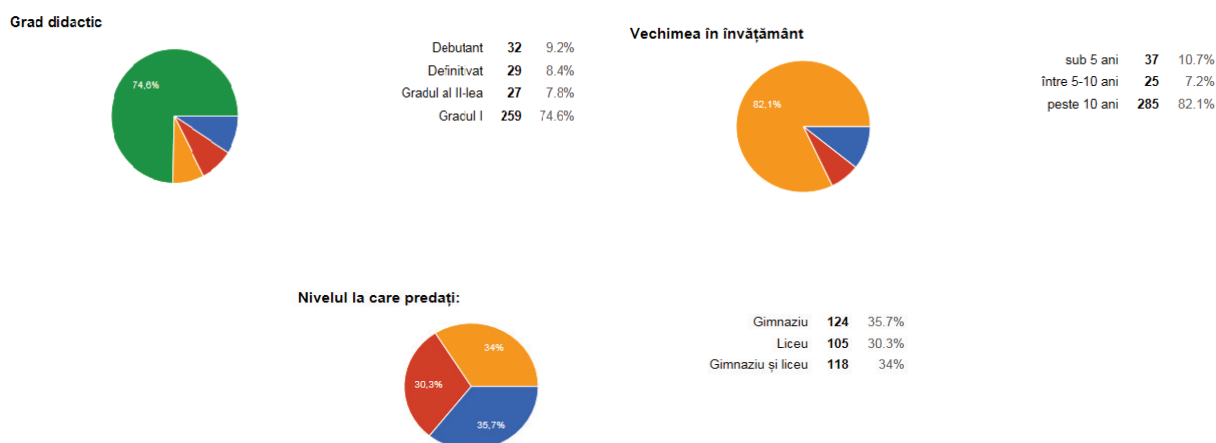


Fig. 1. Caracteristici generice ale profesorilor

¹ Acesta nu este un eșantion reprezentativ pentru întreaga comunitate a profesorilor. Chiar dacă rezultatele nu pot fi extrapolate, acestea au o semnificație locală autentică pentru experți și participanți la studiu.

I. DIAGNOZA EDUCAȚIEI MATEMATICE ÎN ROMÂNIA

1. ROLUL EDUCAȚIEI MATEMATICE

În opinia practicienilor, rolul educației matematice, deși cunoscut de specialiști, nu are o ilustrare în realitate. Nevoile generațiilor de astăzi nu sunt reprezentate în curriculumul actual.

Profesorii participanți la discuții consideră matematica școlară ca fiind un domeniu important pentru capitalul cognitiv al elevilor prin: construirea și ordonarea unor modele de raționament logic, de ordonare a relațiilor între obiecte, de modelare prin aproximarea realității etc. Aceștia promovează în discursul lor natura interdisciplinară a

*„Cum este posibil ca, în urma
progreselor excepționale ale științei
și tehnologiei din ultimele decenii,
matematica școlară să rămână
încă nemodificată în standarde alcătuite
acum 150 de ani?”*

(prof. dr. R. Gologan, SSMR)

învățării, prin care matematica să fie reprezentată corect. Din păcate, în curriculumul național, există rare dovezi ale acestui aspect. În plus, tot mai multe voci afirmă că matematica școlară ar fi eșuat total în reprezentarea cunoașterii dincolo de propria logică științifică.

În general, rolul educației matematice este perceput corect de către practicieni. Marea provocare rămâne ca, în viitor, acesta să se concretizeze. În opinia lor, acest lucru devine posibil doar dacă autorii curriculumului național își vor asuma în mod sincer și realist un astfel de obiectiv.

Profesorii români resimt dramatic nevoia unei strategii de dezvoltare pe termen lung: „Opinia mea referitoare la reforma învățământului (nu numai matematic), este că ea trebuie precedată de formularea (și evident respectarea cu strictețe a) unui proiect de țară. Atât timp cât o țară nu-și definește exact obiectivele (ne dorim preponderent o țară de ingineri, teoreticieni, filosofi, muncitori ș.a), ea nu își va putea dirija sistemul educațional într-o direcție coerentă.” (C.A.I.)

Sau își manifestă emoțional optimismul pedagogic:

„Țări precum China, Japonia, Finlanda, Australia au încredere și finanțează sistemul național de învățământ. SUA și Anglia dezbat problemele, caută soluții, fac schimbări (...). Putem să avem cei mai buni profesori din lume și cele mai bune programe! Să existe comunicare, respect, voință și dorință de acțiune!” (V.T.)



În ancheta bazată pe chestionar, 46,2% din profesori aleg ca rol principal al EM, *pregătirea pentru piața muncii*, o relație de cauzalitate reflectată și în realitatea socială. A doua opțiune, imediat situată (cu o pondere de 45%), este *accesul la*

„Educația matematică are trei ținte principale: dezvoltarea capacității de a face raționamente, crearea suportului pentru formarea unei culturi științifice și formarea deprinderilor de analiză riguroasă a informației.”

(prof. M. Bălună, SSMR)

educația de bază, elementară, conferindu-se educației matematice, rolul cultural definitoriu pe care aceasta îl are. *Accesul la profesii științifice*, cunoscute ca fiind bine cotate social, întrunește alegerea a 42,1% din respondenți. Comparativ cu analiza noastră anterioară, deducem că profesorii români, ca și colegii internaționali, interpretează rolul matematicii în mod similar (vezi studiul *Tendențe ale educației matematice în lume*). Percepția este însă diferită de realitatea existentă. Diferența dramatică survine în modul în care curriculumul

național poate îndeplini aceste roluri. Surprinzător, tonul profesorilor chestionați (legat de modul în care este realizat rolul educației matematice) este unul moderat, discret, deși în discuțiile informale ale unor evenimente profesionale, sentimentul care transpare cel mai adesea, este lipsa de satisfacție privind finalitatea educației matematice.

1. Alegeți două variante de răspuns care să exprime rolul educației matematice, în opinia d-voastră:

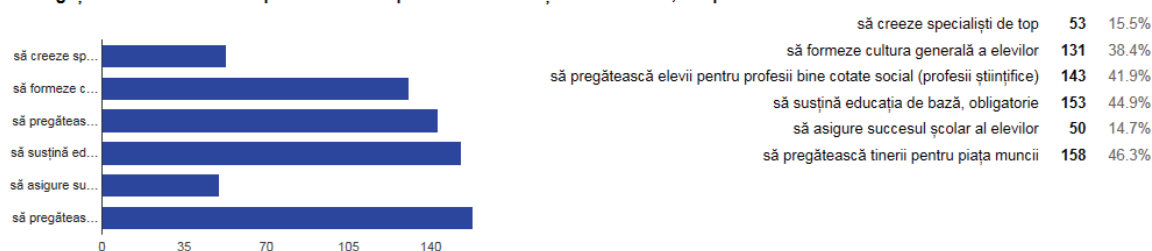


Fig. 2. Percepția profesorilor asupra rolului EM

Curriculumul național reflectă parțial rolurile EM. Așa cum reiese din graficul de mai jos, privind modul în care curriculumul românesc îndeplinește rolurile EM, aproape 40% din respondenți cred că acesta reușește „în măsură potrivită”. 30% sunt adeștii opiniei conform căreia curriculumul național are *în mică măsură* o contribuție la concretizarea acestor roluri. Intuim însă, că cel mai bine îndeplinit este rolul EM ca acces la educația elementară; în ceea ce privește pregătirea pentru piața muncii, există o anumită susceptibilitate, întrucât criza tinerilor absolvenți se instalează tocmai datorită rupturii dintre pregătirea școlară/academică și cerințele pe piața muncii.

Rândul fără nume 1 [2. Curriculumul matematic actual contribuie la realizarea celor două roluri alese de d-voastră?]

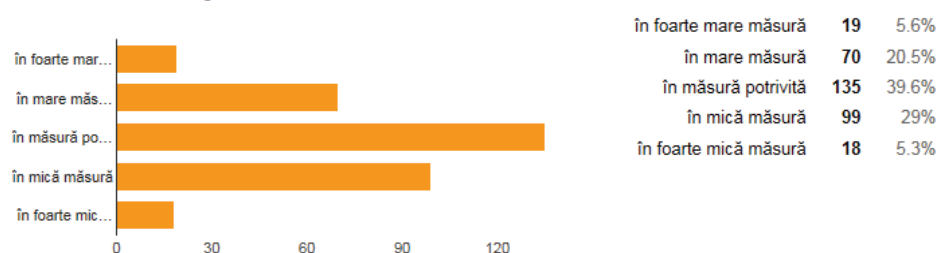


Fig. 3. Contribuția curriculumului național la realizarea rolurilor EM

Asumarea cu succes a acestor roluri este influențată de concepția care stă la baza proiectării curriculumului. Percepția profesorilor este următoarea: 34,9%, respectiv 49% din profesori sunt de acord cu promovarea matematicii școlare *ca domeniu abstract* sau, în mai mică măsură, *ca un ghid de gândire structurată și logică*. „În mare măsură”, se consideră că matematica este organizată *ca un set de algoritmi și reguli care acoperă toate posibilitățile*.

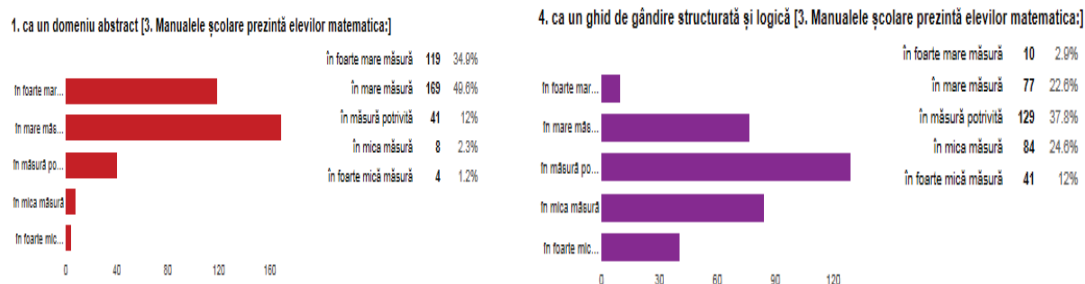


Fig. 4. Percepția asupra matematicii școlare: a). ca domeniu abstract b). ca ghid de gândire logică

Prezentarea matematicii *ca domeniu creativ* rămâne un obiectiv încă nerealizat pentru autorii curriculumului actual (vezi fig. 5a). Doar 1,8% atribuie matematicii școlare această calitate. Cea mai alarmantă problemă rămâne cea legată de caracterul aplicativ al cunoștințelor matematice. Așa cum reiese din graficul de mai jos, 38%, respectiv 28% din respondenți menționează acest mare neajuns al curriculumului, în general - lipsa de finalitate practică.

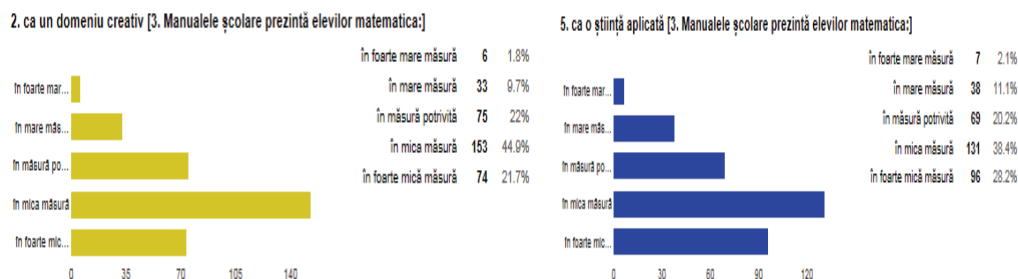


Fig. 5. Percepția asupra matematicii școlare: a). ca domeniu creativ; b) ca știință aplicată

2. CURRICULUMUL MATEMATIC

În calitate de practicieni, profesorii percep schimbările din ultimii ani ca fiind lipsite de coerență și utilitate pentru generațiile actuale, ale căror nevoi și aspirații s-au modificat.

„În manuale, formalismul matematic și cuantificatorii, utili în condensarea comunicării matematice, nu fac decât să provoace confuzie în modul în care elevul înțelege esențialul noțiunilor.”

(prof. dr. R. Gologan, SSMR).

Practicienii cred că există o mare nesiguranță în a integra cunoașterea școlară în cadrul curriculumului matematic; matematica are, uneori, o logică internă lacunară, în special în trecerea de la un an de studiu la altul.

Profesorii participanți la discuții demonstrează un deosebit rafinament pedagogic: de exemplu, cunosc faptul că o construcție curriculară se face concomitent pentru toate nivelurile și nu în salturi sau eșalonat, așa cum se întâmplă acum.



OPINII ALE PROFESORILOR

PUNCTE TARI

- ✓ În țară, există profesori care practică cu succes interdisciplinaritatea, deși manualele școlare, neavând o astfel de deschidere, limitează demersul.
- ✓ Alți profesori diseminează în mediul virtual resurse didactice și modele de predare a matematicii, ca alternativă la curriculumul existent.
- ✓ Programele extracurriculare de pregătire în matematică (pentru cluburile științifice, tabere, competiții) au determinat o creștere semnificativă a motivației și performanțelor unor categorii de elevi.

PUNCTE SLABE

- ✓ Nu s-a realizat în țara noastră o reală analiză de nevoi, respectiv un studiu evaluativ care să măsoare impactul schimbărilor făcute, al modului în care ofertele sunt adaptate elevilor, în funcție de diversitatea profilului lor.
- ✓ Competențele generale și specifice din programe sunt greu de „decodificat” de către practicieni; în plus, nu au coerență și, deși aparțin unor generații succesive de programe cu viziuni declarate ca fiind diferite, ele sunt similare.

- ✓ Selecția conținuturilor matematice a devenit un proces extrem de dificil, o adevărată „necunoscută”.
- ✓ Există specializări care nu au un curriculum matematic adecvat.
- ✓ Densitatea informațională mare determină un ritm accelerat al predării, fără consolidare și sistematizare; organizarea învățării la matematică aduce o serie de discontinuități cu alte discipline, la aceeași clasă sau același nivel.
- ✓ Există o serie de discontinuități între ciclurile de învățământ cauzate de încercările de reducere și/sau generare a unor noi conținuturi.
- ✓ În manuale, experiențele de învățare nu fac referire la criterii de reușită diferențiate - sunt necesare standarde minimale, medii și superioare, pentru a se răspunde la întrebarea „cât se învață?”.
- ✓ De cele mai multe ori, nu se pornește de la experiența de viață a elevilor, de la particular la general, de la simplu la complex, de la concret la abstract.
- ✓ Resursele curriculare cu suportul tehnologiei (de exemplu, învățarea cu ajutorul unor tutoriale) sunt ignorate, deși se recunoaște valoarea lor pentru motivare, exersare de deprinderi, documentare etc.
- ✓ Deși programa prevede dezvoltarea unor competențe pe diferite niveluri de complexitate, activitățile de învățare propuse reflectă fie formarea abilităților simple, bazate pe receptare și memorare, fie a celor abstract-superioare, extrem de greu de accesat.
- ✓ De multe ori, profesorii au sesizat o ruptură între curriculumul predat (ceea ce se predă) și cel evaluat (ceea ce se evaluează).
- ✓ Sunt invocate o serie de exemple concrete de inadaptare a programelor la nevoile celor care învață (prof. dr. R. Gologan):
 - în clasele primare, formalizarea sau chiar algebrizarea problemelor de aritmetică iau locul metodelor intuitive sau imaginative; presiunea pentru memorarea mecanică a operațiilor este un alt aspect;
 - în gimnaziu, există un formalism matematic nejustificat (mulțimi abstracte, mulțimea numerelor raționale etc.) și se folosesc notații și concepte riguroase la geometrie (segmente închise, deschise, semideschise, unghiuri, echivalențe, congruențe, etc.);
 - în liceu, se remarcă utilizarea exagerată a formalizării algebrice fără sublinierea aspectelor intuitive și geometrice; geometria vectorială este greu de asimilat în clasa a IX-a; exagerata vehiculară a unor ecuații zise exponențiale și logaritmice, fără a pune în evidență adevăratele proprietăți și aplicații ale acestor funcții; formalismul prin care sunt introduse numerele complexe, fără nici o exemplificare a valenței lor aplicative în fizică; în analiza matematică, definițiile extrem de riguroase, fără exemplificări, cu sau fără utilizarea computerului; matricele și determinanții apar în manuale ca obiecte formale, străine de orice fenomen explicabil intuitiv sau geometric; de asemenea, modul abstract în care sunt studiate o serie de structuri algebrice.



Am încercat să stabilim o ierarhie a *sarcinilor de învățare*, în funcție de frecvența cu care acestea apar în activitățile matematice. Observăm cum abilitățile complexe sunt exersate din ce în ce mai puțin (vezi graficul nr. 6).

Astfel, elevii:

1. rezolvă probleme simple;
2. operează cu numere și simboluri matematice;
3. memorează formule și reguli de aplicare;
4. argumentează soluțiile aflate;
5. construiesc singuri raționamente;
6. gândesc critic, creativ și original;
7. explică concepte, principii și strategii;
8. deduc formule matematice.

4. Alegeți trei variante de răspuns pentru cele mai întâlnite sarcini de învățare adresate elevilor:

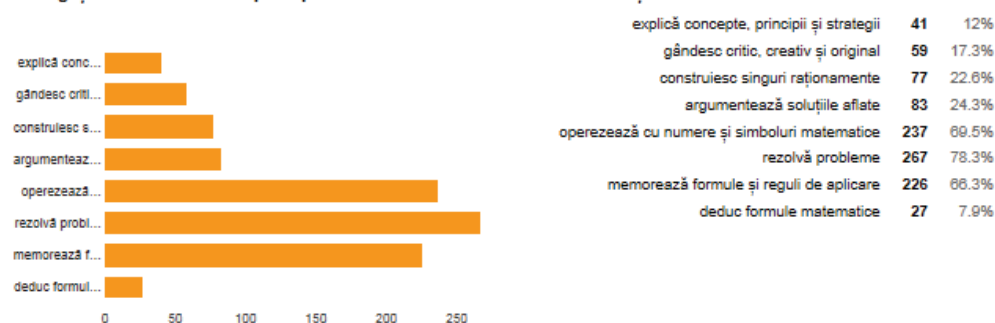
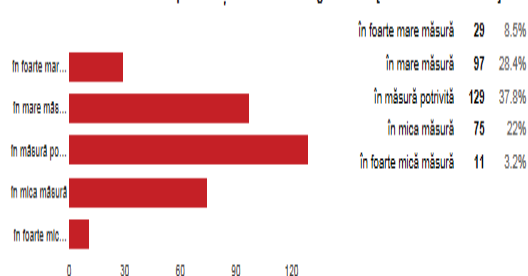


Fig. 6. Ierarhia comportamentelor de învățare

Ne-am propus să surprindem opinia profesorilor legată de *continuitatea între curriculumul de nivel primar și cel secundar, respectiv cu cel de nivel liceal*. Ponderile următoare (37,8% și 38,7%) descriu răspunsul celor care consideră că o astfel de continuitate există în „măsură potrivită”.

1. între matematica din clasele primare și matematica de gimnaziu? [5. Există continuitate:]



2. între matematica de gimnaziu și matematica de liceu? [5. Există continuitate:]

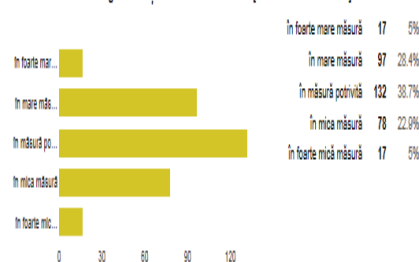


Fig.7. Continuitatea între niveluri

Totuși, în discuțiile libere, extrem de multe elemente de discontinuitate apar, și nu discret, în opiniile profesorilor legate de:

a. învățarea anterioară: - învățarea mecanică, fără explicații și exemplificări potrivite, a unor rețete de rezolvare împiedică exersarea gândirii logice; absența abilităților de gândire creativă, divergentă și critică; lipsa exercițiului și a înțelegerii noțiunilor de bază; lipsa de coerență în trecerea de la modul de lucru algoritmic, specific claselor I-IV la cel logico-deductiv, prezent în activitățile din gimnaziu; lacune în cunoștințe din nivelul anterior de studiu.

„Pentru elevi, pare să fie foarte dificilă trecerea de la matematica de ciclu primar, care reprezintă în mare parte aritmetică, la cea de gimnaziu care introduce noțiuni de geometrie și algebră. Matematica de gimnaziu este densă, plină de noțiuni teoretice cărora elevii nu le văd utilitatea. Volumul mare de informații asimilate în timp scurt, insuficient exersate din lipsa de timp, face ca mulți elevi să nu considere matematica, o disciplină ce se studiază simplu și cu plăcere.” (Profesor, răspuns liber în ancheta pe bază de chestionar)

b. calitatea curriculumului: - nivelul ridicat de abstractizare; cantitatea materiei de studiu care crește progresiv și în ritm alert; lipsa de continuitate între programele școlare de niveluri de școlaritate succesive; calitatea îndoielnică a întregului plan-cadru; lipsa suportului practic, intuitiv pentru resursele de învățare; contrastul dintre tipul de gândire vizat de competențele din programa școlară și caracteristicile psiho-fizice ale elevilor; absența inter-, transdisciplinarității în activitățile de învățare; pentru ambele treceri, diferențe mari de dificultate ale conceptelor matematice explicate în limbaj specific; algoritmizarea excesivă; viziuni diferite la nivelul autorilor de manual.

c. adaptarea școlară: interacțiunea elevului cu un nou mediu de învățare, diferențele între mediul rural și urban, climatul social nou și procesul de acomodare cu cerințele școlare (ritm de studiu, stiluri de predare, volum de cunoștințe, limbaj matematic), aspecte motivaționale (scăderea progresivă a motivației pe parcursul anilor de studiu).

„Nu se parcurge o etapă pe parcursul căreia să se restructureze cunoștințele din ciclul anterior pentru a fi ușor conectate la cele care urmează. Se produc salturi care-l pun în dificultate pe elev.” (Profesor, răspuns liber în ancheta pe bază de chestionar)

„În primar, se studiază ani la rândul lucruri similare, făcând foarte lent pași mici. În gimnaziu, se insistă foarte mult asupra unor algoritmi care să asigure succesul la evaluarea națională. Există modele de subiecte pe care elevii mici exersează, le asimilează, dar nu sunt capabili să facă raționamente complexe, să extrapoleze pornind de la lucrurile învățate, șocul fiind cu atât mai mare cu cât se trece de la un ritm de progresare foarte lent, la unul susținut.” (Profesor, răspuns liber în ancheta pe bază de chestionar)

În opinia profesorilor, caracteristicile de mai jos sunt omise în concepția manualelor de matematică. Fiind deficitare sub aspect practico-aplicativ, majoritatea profesorilor

(45,5%, respectiv 37,2 %) își exprimă dorința de a accesa împreună cu elevii mult mai multe *aplicații* pornind de la noțiunile matematice.

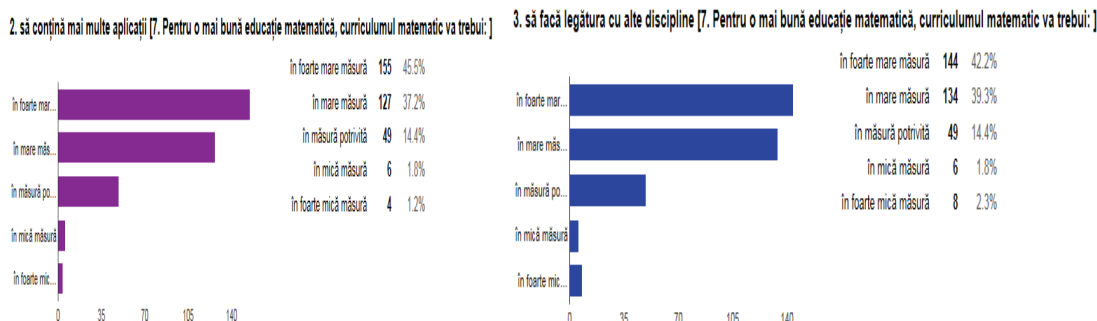


Fig. 8. Cerințe: a). necesitatea aplicațiilor matematice

b). conexiunea cu alte discipline

Un astfel de scop se poate realiza cu succes și prin *interacțiunea între discipline*; se discută, la nivel de comunitate profesională, despre eficiența matematicii ca limbaj universal al științei (prof. dr. W. Boskoff).

Cu referire la timpul alocat temelor, considerat a fi insuficient pentru consolidarea cunoștințelor, profesorii resimt nevoia de a găsi în structura manualelor pasaje mult mai consistente dedicate *fixării cunoștințelor*. În opinia celor mai mulți respondenți (41,6% și 40,8%), aplicațiile sub forma exercițiilor trebuie să aibă o *adresabilitate diversă*, raportată la caracteristicile elevilor, în special cele ce presupun ritmuri de învățare și abilități cognitive diferite (vezi fig. 9 b).

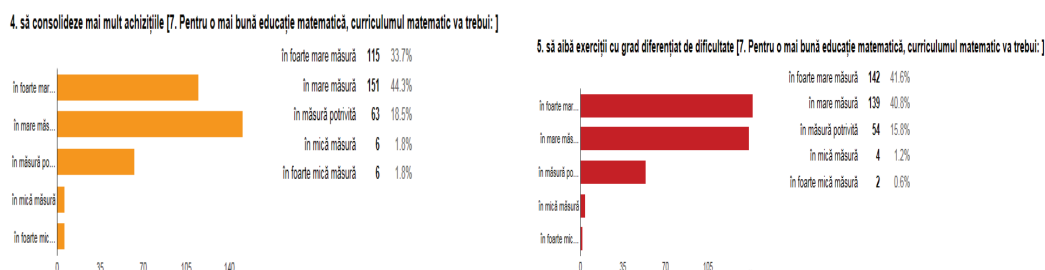


Fig. 9. Cerințe: a). consolidarea achizițiilor; b). exerciții cu dificultate diferită

De asemenea, modelele de rezolvare și demonstrațiile matematice sunt minimal prezente în manualele școlare (vezi graficul de mai jos):

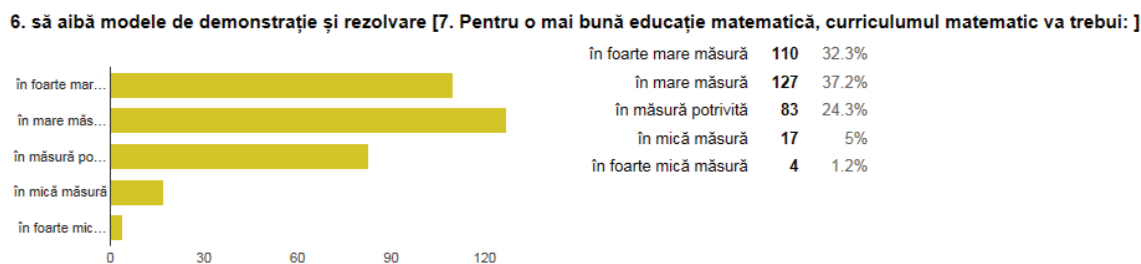


Fig. 10. Nevoia de modele de demonstrație și rezolvare

O surpriză este faptul că doar 20,8% declară ca fiind în mare măsură necesară, *reducerea conținuturilor*, așa cum reiese din reprezentarea următoare:

1. să fie redus cantitativ [7. Pentru o mai bună educație matematică, curriculumul matematic va trebui:]

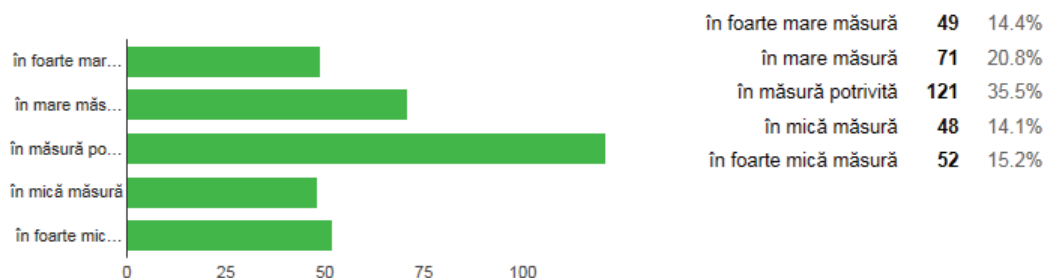


Fig. 11. Nevoia de a reduce volumul cunoștințelor

În cadrul discuțiilor, există un consens general, conform căruia manualele actuale nu asigură un suport optim în învățarea autonomă a elevului. Mare parte din propuneri depind de intervenția consistentă și coerentă a profesorului, gestionată ca o *hiper-dirijare a învățării*. Altfel spus, manualele de matematică îndeplinesc prea puțin rolul de mediere a cunoașterii.

3. PRACTICILE DE INSTRUIRE

În România, curriculumul matematic generează practici ce conțin în mare parte strategii bazate pe receptare/memorare și studiu dirijat.



OPINII ALE PROFESORILOR

PUNCTE TARI

- ✓ În general, profesorii români sunt buni cunoscători ai pedagogiei practice și adaptează strategiile în funcție de temele și obiectivele concrete de învățare.
- ✓ În practică, există numeroase dovezi despre modul în care se folosesc metode specifice *învățării prin descoperire* și *învățării prin proiecte* (în special în temele de recapitulare). Uneori, produsele devin parte din *portofoliul elevului*, o metodă de învățare/evaluare valoroasă d.p.d.v. cognitiv.
- ✓ În urma relatării diferitelor experiențe, constatăm că profesorii folosesc metode colaborative cu *efective mari* de elevi din clasele de gimnaziu. Deși eficiente din punct de vedere socio-emoțional (dezvoltând spiritul de echipă, comunicarea, stima de sine), aceste metode sunt consumatoare de timp și necesită abilități

suplimentare, de management al clasei.

- ✓ Profesorii participanți la studiu cunosc valoarea abilităților de relaționare cu elevii. Aceștia sunt de acord cu observația lui Frank Coffield de la Institutul de Educație din Londra, conform căreia nu metoda este cea mai importantă pentru eficiența învățării, ci construirea unei *relații pedagogice pozitive între*

„Instruirea în matematică nu poate fi încadrată decât formal în curente pedagogice.

O astfel de știință nu poate fi înțeleasă decât de cei capabili să urmeze principii de învățare specifice. Cu toate acestea, ea poate avea succes doar dacă elevii demonstrează prin muncă, pasiune și motivație.”

(prof. dr. Doru Ștefănescu
SSMR)

profesor și elevi. Alte argumente ale autorului evocat se bazează pe faptul că nu există o teorie unitară sau o metodă optimă de a determina stilurile de învățare ale elevilor. Foarte important este *contextul concret de învățare*, influențat de natura interacțiunii dintre profesor și elevi. Profesorul trebuie să cunoască nivelul real/potențialul elevilor și să includă o astfel de realitate în proiectarea lecțiilor.

PUNCTE SLABE

- ✓ Cel mai întâlnit scenariu didactic este cel derivat din instruirea tradițională, prin care profesorul prezintă noțiunile, exemplifică, apoi cere elevilor să exerseze după modelul prezentat. De multe ori, exercițiul repetitiv predomină, exersându-se comportamente de învățare inferioare din taxonomia lui Bloom (cunoașterea, înțelegerea, aplicarea), în detrimentul celor valoroase, precum analiza, sinteza și evaluarea.
- ✓ Profesorii participanți la discuții relatează faptul că instruirea este una intens dirijată.
- ✓ Practicile de instruire sunt influențate de abilitarea metodică a profesorilor, dar sunt rare evenimentele cu un autentic caracter de învățare profesională.
- ✓ Instruirea diferențiată este o practică de instruire ideală, cunoscută și apreciată de către profesorii români. Aceasta se dovedește însă dificil de realizat datorită efectivelor mari ale claselor de elevi (30+), un efect al segregării claselor pe criteriul vârstei; din acest motiv, activitățile de învățare se adresează preponderent nivelului mediu al performanțelor elevilor.
- ✓ Lipsa resurselor și a materialului didactic sunt marile neajunsuri în aplicarea tuturor acestor strategii.

Extrase din discuții

„Dacă elevii nu pot învăța așa cum predăm noi, nu avem altă soluție decât să predăm așa cum pot învăța ei.” (I.V.)

„Noi trebuie să ne facem înțeleși și să ne adaptăm nivelului și stilurilor de învățare ale elevilor. De exemplu, două lecții la clase paralele, pe același subiect, nu vor fi niciodată la fel. Profesorul trebuie să se adapteze nivelului clasei.” (M.P.)

„Se vorbește despre învățământul centrat pe elev, despre instruirea diferențiată... Dar câți dintre noi o practicăm? (...) Eu apelez la lucrul diferențiat, dar mai mult la recomandarea unor teme diferențiate. Numărul mare de elevi este, după părerea mea, un obstacol important în centrarea atenției unui profesor pe fiecare elev.” (D.S.)



Strategiile de instruire au un important rol de orientare a învățării, dar și de motivare. Privind tipul metodelor uzitate la clasă, în ierarhia creată de profesorii chestionați, se situează: *exercițiul, explicația și rezolvarea de probleme. Metoda proiectului* are cea mai scăzută popularitate în rândul profesorilor de matematică.

Aceasta este eficientă în temele transdisciplinare, de unde deducem natura strict disciplinară a sarcinilor de învățare la matematică.

Doar 10% sunt adepții *metodelor de învățare colaborativă*, o opțiune mai puțin selectată decât *studiul individual* și *lucrul în grupuri mici* - forme de organizare considerate optime în învățarea matematicii.

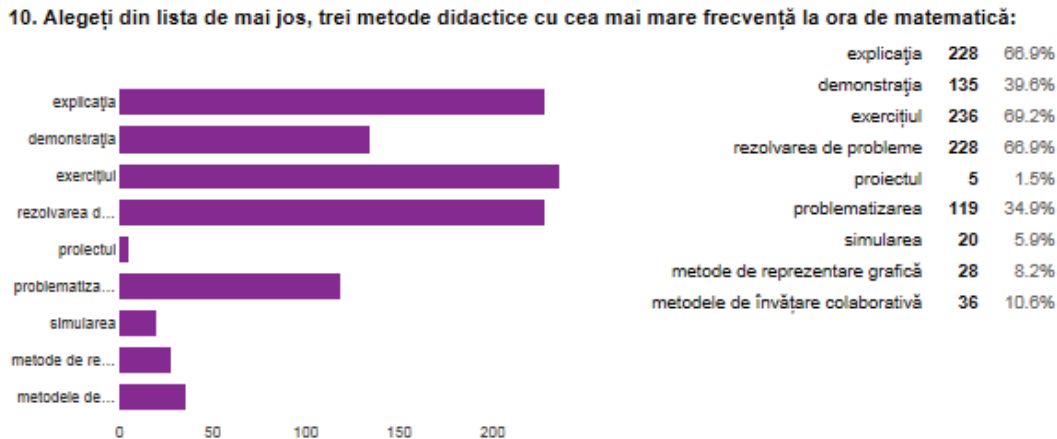


Fig. 12. Frecvența anumitor metode de învățare

Paradoxal, deși mai puțin selectată în opțiunile profesorilor prezenți (vezi fig.13b), în România, *activitatea cu întreaga clasă* (instruirea frontală) rămâne forma dominantă care face parte din rutinele didactice.

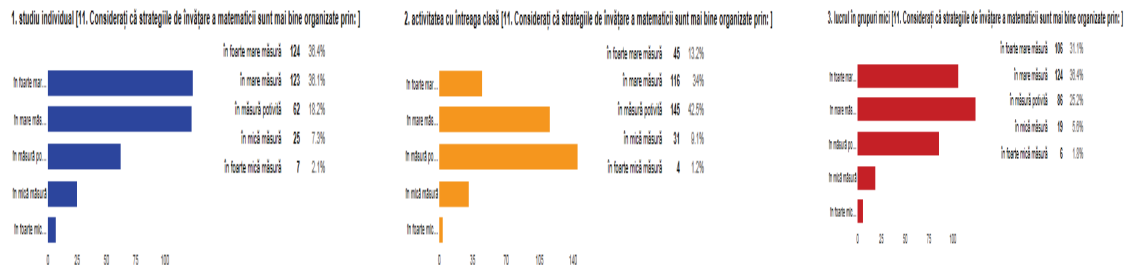


Fig. 13. Forme de organizare în studiul matematic

a. studiul individual

b. activitatea cu întreaga clasă

c. lucrul în grupuri mici

4. EVALUAREA PERFORMANȚELOR

Reușita școlară a elevului este determinată de modul în care acesta răspunde standardelor de evaluare și nu de calități interne exersate prin învățarea autonomă.



OPINII ALE PROFESORILOR

PUNCTE TARI

- ✓ Subiectele au devenit accesibile pentru majoritatea elevilor; procentul de promovare a crescut în ultimii ani datorită scăderii gradului de dificultate al subiectelor.
- ✓ Publicarea celor 100 de variante de teste în perioada 2007- 2009 a fost apreciată de majoritatea profesorilor ca având un rol important în familiarizarea elevilor cu tipul și conținutul acestor teste de evaluare.
- ✓ Scăderea nivelului de dificultate din ultimii anii sprijină mai mult învățarea.
- ✓ Fiind o evaluare externă, are un grad de obiectivitate ridicat.
- ✓ Securizarea examenelor a dus la diminuarea numărului cazurilor de fraudă și la un proces mai corect; se consideră că procesul de securizare a examenului a influențat decisiv procentul de promovabilitate.
- ✓ Posibilitatea pretestărilor a dus la creșterea interesului pentru rezolvarea de probleme din baza de date; practica testărilor determină elevii să-și însușească algoritmii de rezolvare.

PUNCTE SLABE

- ✓ Sunt neglijate resursele de creativitate și inteligență prin lipsa stimulării abilităților superioare, lipsa caracterului aplicativ și accentuarea naturii abstracte a sarcinilor din subiectele de examinare.
- ✓ Învățarea și evaluarea nu au o deschidere transdisciplinară.
- ✓ Se consideră că interesul pentru învățarea matematicii scade treptat, la nivel național.
- ✓ Evaluarea de la finele clasei a VI-a nu are o finalitate clară; deși există o statistică la nivel național, nu s-au aplicat măsuri ulterioare de remediere și îmbunătățire.
- ✓ Deprinderile matematice sunt supravalorizate în testele evaluative, iar abilitățile de gândire, subreprezentate.
- ✓ Uneori există o ruptură între curriculum (ceea ce se predă) și evaluare (ceea ce se evaluează).

- ✓ Lipsește bacalaureatul diferențiat care să susțină elevii pentru opțiuni ulterioare sau care să evidențieze o finalitate clară a celor 12 ani de studiu.
- ✓ Se exprimă ideea conform căreia bacalaureatul nu ar trebui să constituie unicul mijloc de selecție pentru admiterea în învățământul superior; interviul de admitere, atașat procesului de selecție, este unul superficial.
- ✓ Nu există coerență în parcursul educațional (tezele cu subiect unic s-au transformat în testări naționale și, ulterior, în evaluări naționale la nivelul aceleiași populații școlare).
- ✓ Profesorii prezenți la discuții fac o analiză pertinentă a procentelor de promovare la examenul de bacalaureat între anii 2004-2015:

2004-2009 - procentul de promovare este nerealist, afectat de lipsa corectitudinii sau de publicarea variantelor de subiecte însoțite de rezolvările acestora; 2010 - are loc o scădere cu 10 procente, determinată de eliminarea variantelor de subiecte; 2011 – o altă scădere procentuală, cauzată de creșterea nivelului de dificultate al subiectelor și de introducerea camerelor de supraveghere; urmează o perioadă de trend ascendent datorat scăderii nivelului de dificultate al examenelor.

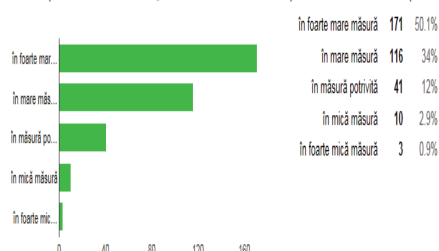
Extrase din discuții:

„Nu sunt specialistă în International Bacalaureat. Ce mi se pare important, este că notarea este altfel: se urmărește să se arate ce ai învățat și ce nu, nu ți se dă ca feedback doar nota, ci și un raport. Testele conțin probleme ce țin de viața reală, iar elevii au voie să calculeze folosind calculatorul (inclusiv grafice ale funcțiilor). Există o sincronizare a disciplinelor: se predă același lucru, în același timp, la mai multe discipline. Strategia este de a trece de la particular la general. Elevii descoperă formule și reguli. Se lucrează cu emoții. Profilul profesorului este al unui om entuziast care încurajează orice răspuns și îl îmbunătățește. Există și o cultură vizuală foarte accentuată: o clasă cu desene matematice, cu formule atractiv afișate. Manualele străine insistă mult pe utilizarea tehnologiei. ” (G.A.E.)



Legat de factorii care determină performanțele (la teste naționale, bacalaureat), peste 50 % din profesori consideră că reușita este condiționată *în foarte mare măsură* de: *cunoașterea anterioară solidă și antrenamentul pentru examene* (vezi fig.14 a și b).

2. cunoașterea anterioară solidă [12. În ce măsură scorurile obținute de elevi la testele naționale/bacalaureat sunt influențate de:]



1. antrenamentul pentru examene [12. În ce măsură scorurile obținute de elevi la testele naționale/bacalaureat sunt influențate de:]

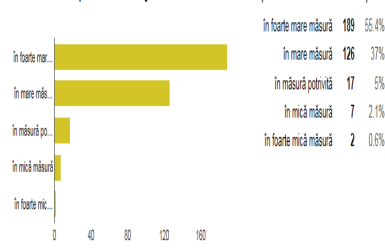


Fig. 14. Factori de influență: a). cunoașterea anterioară b). antrenamentul pentru examene

Capacitatea de aplicare a cunoștințelor matematice (vezi fig.15 a) este o abilitate exersată minimal, sub forma folosirii unei formule în diferite exerciții sau a unei succesiuni de pași în rezolvarea problemelor de tip matematic.

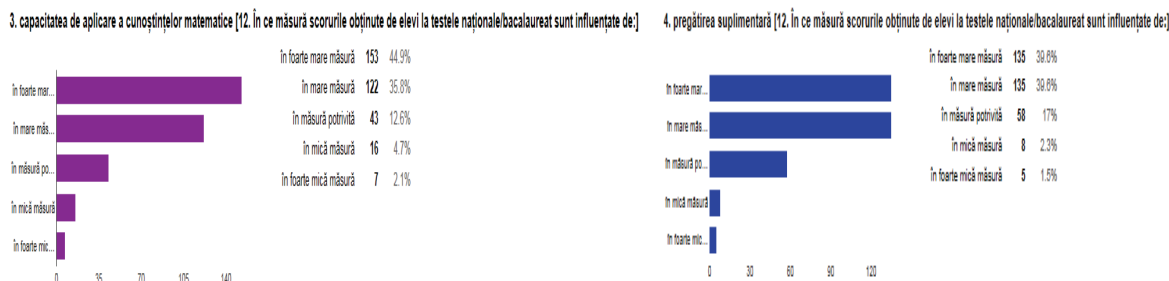


Fig 15. Factori de influență a). capacitatea de aplicare a cunoștințelor b). pregătirea suplimentară

Pregătirea suplimentară (vezi fig. 15b) este o practică compensatorie foarte populară în rândul elevilor români. Cauzele sunt multiple, însă principalul factor invocat este timpul de instruire limitat, raportat la tematica densă care trebuie parcursă. Predarea se realizează într-un ritm alert, conform planificării prin programă, iar aprofundarea se realizează în special prin studiu individual asistat (meditațiile de acasă). Investiția familiei este considerabilă, în acest sens. În România, este în mod larg acceptat faptul că aceasta condiționează reușita elevului.

Simularea prin teste similare (vezi fig.16) influențează, de asemenea, rezultatele la testele sumative.

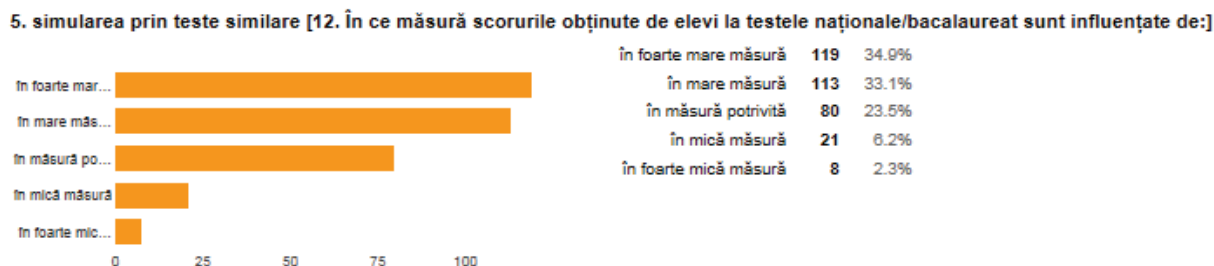


Fig. 16. Simularea prin teste similare

Metodele de evaluare sunt un bun indicator pentru modul în care este organizată învățarea. Metoda care apare cu cea mai mare frecvență este *testul*, adunând 88,6% din opțiuni, urmată de *verificarea la tablă* (80,9%) și *lucrarea de control* (68,6%). Remarcăm faptul că sunt uzitate în mod preponderent metodele de verificare scrisă, considerate metode tradiționale (vezi fig.17). Acestea sunt adeseori comparate de specialiștii în educație cu metodele moderne (portofoliul, proiectul, investigația, autoevaluarea, proiectul de cercetare), ale căror avantaje sunt indubitabile. De exemplu, *proiectul* și *proiectul de cercetare* sunt metode de sinteză transdisciplinare, extrem de valoroase pentru dezvoltarea abilităților de cercetare ale elevilor. Acestea sunt subreprezentate în practica evaluativă, înregistrând opțiunea a 5,9 % (*proiectul*), respectiv 1,8 % (*proiectul de cercetare*).

13. Alegeți trei din metodele de evaluare cel mai frecvent folosite la matematică.

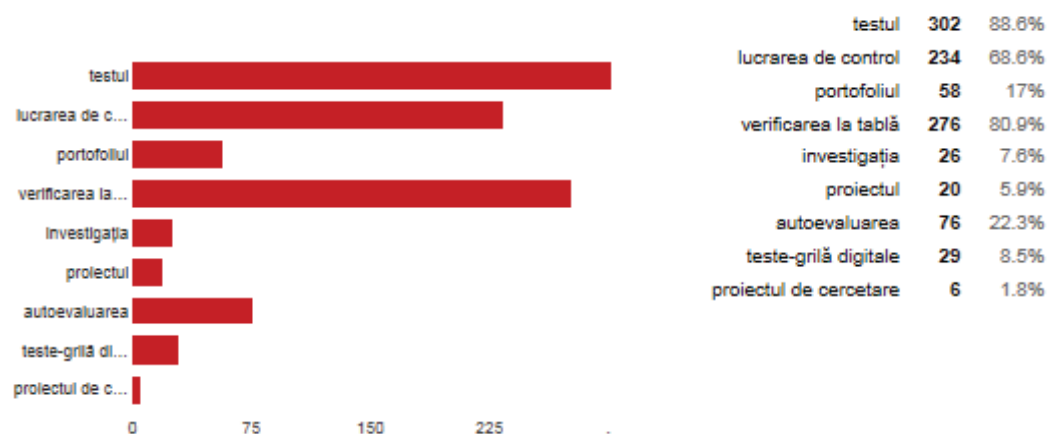


Fig. 17. Frecvența unor metode de evaluare

5. FORMAREA PROFESORILOR

Formarea profesorilor este intens contestată, din perspectiva pregătirii practice și metodice. Exercițiul profesional este marcat de o criză a motivației.



OPINII ALE PROFESORILOR

PUNCTE TARI

- ✓ Există o cultură competitivă manifestă a României și un apetit pentru concursuri și olimpiade școlare, care au menținut dorința de performanță a elevilor și aspirația de perfecționare a profesorilor acestora.
- ✓ Societatea de Științe Matematice din România facilitează stabilirea unor parteneriate și schimburi de experiență valoroase.
- ✓ În România, există tradiția învățământului românesc de calitate.
- ✓ Se editează periodic reviste de specialitate cu o tradiție remarcabilă (*Gazeta Matematică*, *Recreații Matematice*, *Revista de Matematică din Timișoara*, etc).
- ✓ Nivelul științific ridicat al programelor de matematică a contribuit la păstrarea standardelor de performanță superioare.
- ✓ Profesorii de matematică sunt membri activi ai unor comunități virtuale ce favorizează schimburi de experiență în medii nonformale; grupurile de socializare cu specific matematic și didactic contribuie la menținerea unor conexiuni prin care sunt discutate problemele curente ale profesorilor de matematică.
- ✓ În cadrul unora dintre facultățile de matematică din țară au fost create masterate didactice (Didactica matematică), cu un conținut relevant și aplicabil în activitatea profesională.
- ✓ Inspecția la clasă vizează pregătirea practică a profesorului.
- ✓ Există o ofertă variată de formare: posibilitatea de a selecta dintr-o gamă diversă de cursuri de formare în didactica matematică furnizate de SSMR, Asociația IDEE, Stanford Online etc.
- ✓ Experiența profesională este întotdeauna un avantaj (în calitate de profesor-antrenor al elevilor, membru în comisia de selecție a subiectelor, membru în comisia de evaluare etc).
- ✓ Profesorii participă la conferințe în care prezintă rezultate ale activităților;
- ✓ Profesorii de matematică (de performanță) dezvoltă o viziune extinsă asupra disciplinei de care beneficiază toți elevii săi.
- ✓ Autoformarea didactică este specifică profesorului din România prin: elaborarea și rezolvarea de probleme utilizate pentru proiectarea unor materiale didactice, folosirea ca resurse de învățare a periodicelor matematice (*Gazeta matematică*, *Didactica matematică*, reviste electronice).

PUNCTE SLABE

„Din păcate, absolvenții facultăților de matematică nu sunt pregătiți pentru „întâlnirea” cu elevii. Orele de practică pedagogică și pregătire metodică sunt puține, iar cursurile de pedagogie sunt pur teoretice. O posibilă soluție ar fi masteratul didactic organizat în cadrul facultăților de matematică și al unor stagii profesionale în primii 2 ani.”

(conf. dr. Cătălin Gherghe, SSMR).

efectuate puține ore de practică în timpul facultății, iar cursurile de psihopedagogie conțin în mare parte teorie științifică.

- ✓ Nu există stagii obligatorii de pregătire în școală pentru debutanți.
- ✓ Se remarcă birocratizarea excesivă a activității per ansamblu, ceea ce duce la diminuarea timpului pentru pregătirea didactică.
- ✓ Există presiuni externe privind obținerea unui cuantum de credite care să ateste valoarea profesională; procesul de formare/dezvoltare a profesorilor este unul formal, centrat pe pregătire teoretică.
- ✓ Oferta de formare este limitată la tematica tradițională; probabil sunt puține cursuri de dezvoltare a abilităților de comunicare și gândire strategică pentru profesorii de matematică.

„Pregătirea și perfecționarea profesorilor ar trebui să fie un proces continuu chiar după absolvire sau după obținerea gradelor, inspectorii de specialitate având rolul lor.”

(conf. dr. Cătălin Gherghe, SSMR).

- ✓ Cele mai multe activități profesionale au un caracter formal: cercurile pedagogice nu se susțin într-un mod constructiv; lecțiile-model sunt adeseori regizate, iar tematica este impusă.
- ✓ Formarea inițială este deficitară: absolvenții de universități nu sunt pregătiți pentru lucrul efectiv cu clasa; sunt
- ✓ Există o slabă colaborare între profesorii din ciclul primar și cel gimnazial, respectiv între profesorii de gimnaziu și cei de liceu; lipsa unui astfel de schimb de experiență poate afecta continuitatea în predarea matematicii; conexiunea între mediul universitar și cel preuniversitar este, de asemeni, slabă.

- ✓ Anumite universități derulează cursuri de formare fără o legitimitate serios verificată, și permite obținerea gradelor didactice fără criterii meritocrate.
- ✓ Există la nivel sistemic, o hegemonie a facultăților cu profil psihopedagogic care împiedică dreptul facultăților de a forma profesori.
- ✓ Conținutul examenelor (de titularizare sau definitivat) este preponderent de natură pedagogică, componenta științifică fiind mult diminuată.

- ✓ Inspectorii școlari de specialitate sunt aleși pe criterii politice și nu pe criterii de competență metodică-științifică.
- ✓ A scăzut în mod dramatic prestigiul social al profesorului;

„Înțelegerea matematicii presupune un intermediar care poate transmite corect noțiuni matematice, dar și emoții; trebuie să creeze acea stare care transformă studiul matematicii în plăcerea cunoașterii. Acest intermediar este profesorul bine pregătit.”

(prof. dr. W. Boskoff, SSMR)

Mulți din profesorii participanți la discuții sunt un exemplu de vocație: „Am hotărât să devin un profesor, (...) am investit constant în acest vis, acumulând experiențe conștiente sau subconștiente, am furat din strategiile profesorilor mei, colegilor mei și am provocat momente de împărtășire a reușitelor. Chiar dacă am absolvit un liceu tehnic, aplecarea spre studiul matematic și didactic nu a încetat.”(P.B.)

Menționăm faptul că profesorii participanți la studiul nostru sunt exponenții unei categorii profesionale motivate. Viața profesorilor trebuie privită în contextul larg al întregii societăți. Gândindu-ne la tabloul generic, pare un paradox exemplul acesta de profesionalism activ:

- 66,3% au participat la ateliere, conferințe;
- 67,2% sunt înscriși într-o asociație profesională;
- 81,2% sunt membri ai comisiilor metodice;
- 78,6% sunt membri în comisiile de evaluare;
- 76% au participat la cursuri de dezvoltare profesională;
- 69,3% sunt membri ai unei comunități virtuale.

Din lista activităților, excepție fac experiențele internaționale. 72% din respondenți declară că nu au făcut în ultimul an un stagiu de mobilitate profesională, inițiativă mai dificil de derulat din cauza accesării selective de fonduri.

Din cercetarea derulată, reiese faptul că peste 70% din profesorii chestionați acordă importanță *planificării și pregătirii lecțiilor* (vezi fig. 18a). Este o necesitate derivată nu doar din dinamica profesiei, ci și din dorința de adaptare la nevoile concrete ale elevilor.

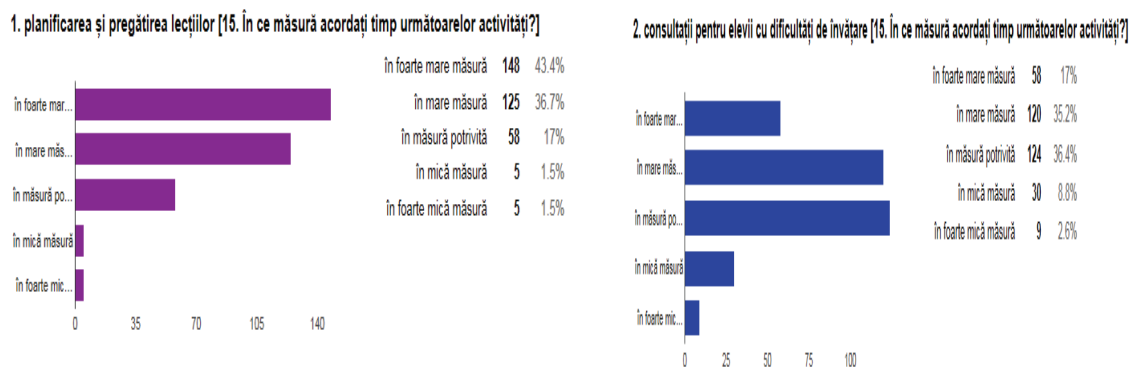


Fig. 18. Activități profesionale: a). pregătirea lecțiilor b). consultații de remediere

În discuțiile informale, profesorii reclamă lipsa de timp pentru programele de remediere. Doar 35,2% din profesori concep și desfășoară *activități pentru elevii cu dificultăți de învățare*.

Intensificarea muncii este un aspect negativ, des invocat de către toți profesorii români. Așa cum reiese din graficul de mai jos, cele mai mari procente din totalul respondenților (28,7% și 27,9%) relevă *implicarea în sarcini administrative*. Din păcate, aceste activități afectează în mod direct timpul pentru activitatea didactică (vezi fig.19).

3. sarcini administrative în școală [15. În ce măsură acordați timp următoarelor activități?]

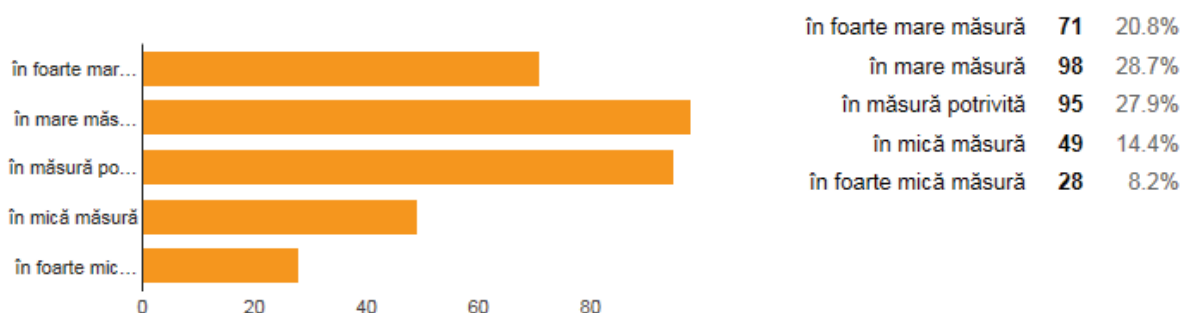
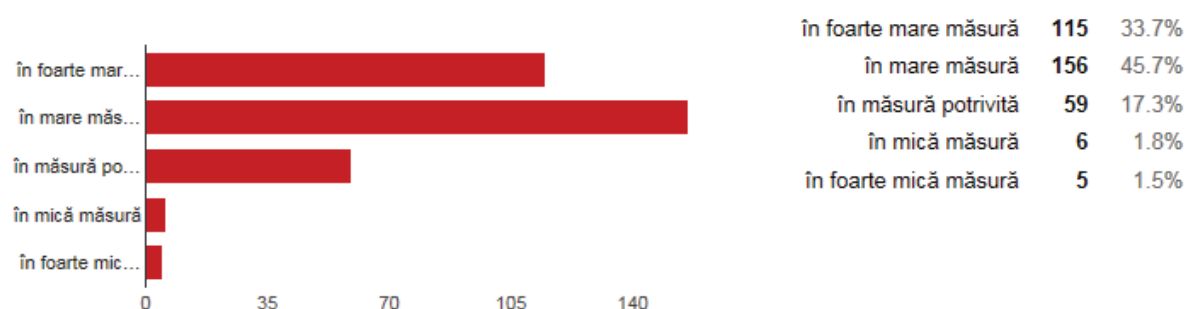


Fig. 19. Sarcini administrative

Consolidarea învățării este „în mare măsură” o preocupare pentru 45,7% din profesori, considerată o condiție esențială pentru reușita elevului (vezi fig. 20).

4. consolidarea materiei [15. În ce măsură acordați timp următoarelor activități?]



Profesorii participanți la studiul de față au la baza culturii lor matematice, diverse lecturi:

Îmblânzirea infinitului, Ian Stewart; *Este Dumnezeu matematician?*, Mario Livio; *Miraculoasele ecuații*, *Triunghiul*, *ringul cu trei colțuri*, Viorel Ghe. Vodă; *Mathematical Modeling and Modeling Mathematics* - Christian R. Hirsch, Amy Roth McDuffie; *Părinți străluciți*, *Profesori fascinanți*, Augusto Curry; *Universul nostru matematic*, Max Tegmark; *Probleme neelementare tratate elementar*, I. Iaglom; *Geometria triunghiului*, Lalescu T; *Creierul nostru muzical*, D. Levitin; *Hărți mentale*, Tony Buzan; *Învățarea vizibilă*, Jon Hattie; *Etica*, Spinoza; *Mathezis*, C. Noica; *Pasiuni*, Constantin Chiriță etc.

6. MOTIVAREA ÎN ÎNVĂȚAREA MATEMATICII

Profesorii români semnalează scăderea treptată a motivației pentru studiul matematicii pe parcursul anilor de gimnaziu și liceu.

În urma discuțiilor, deducem faptul că profesorii simt nevoia să fie reprezentați de voci care, printr-un efort de popularizare a științei, să aducă în atenția colectivă, argumente care să susțină importanța studiului matematicii în școală.



OPINII ALE PROFESORILOR

PUNCTE TARI

- ✓ Mulți profesori apelează la alternative de învățare, utilizând resurse digitale, implicându-se în proiecte, concursuri și parteneriate educative; elevii sunt antrenați în concursuri, în funcție de abilități; profesorii realizează variate activități interdisciplinare în cazul anumitor proiecte educative (Multitouch, Intelteach).

„Un manual bun de matematică trebuie să conțină aspecte ale istoriei matematicii și aplicații ale matematicii în fizică, chimie, economie și biologie.”

(prof. dr. W. Boskoff, SSMR)

- ✓ Foarte mulți profesori au creat opționale atractive pentru a stimula interesul elevilor pentru matematică.
- ✓ Istoria matematicii este folosită frecvent ca metodă de motivare a elevilor în timpul lecțiilor.

PUNCTE SLABE

- ✓ Există o anumită presiune creată de standardele prescrise ale examenelor, ceea ce determină anxietate în învățarea matematicii.
- ✓ Învățarea prin încercare și eroare nu este o practică populară, persistă frica de greșeală; din discuții, reies două cauze majore ale anxietății matematice: obligativitatea memorării/ reproducerii de noțiuni insuficient înțelese și cursa contra-cronometru în cazul testărilor.
- ✓ Conținutul învățării este circumscris examenelor; elevii și profesorii nu mai sunt interesați de contextul matematic al unei probleme, ci de asimilarea unor tehnici

de abordare a acelor tipuri de probleme specifice testărilor.

- ✓ Volumul informațional supus memorării este mare, centrat pe reproducerea formulelor și nu pe deducerea logică a acestora.
- ✓ Există o ruptură vizibilă între conținutul învățării și viața reală a elevului.
- ✓ Lecțiile de matematică au un caracter rutinier.
- ✓ Există o discrepanță între educație/formare și piața muncii; matematica nu condiționează accesul la multe din studiile universitare.

Se remarcă *scăderea treptată a motivației pentru studiul matematicii* pe parcursul anilor de gimnaziu și liceu. În opinia profesorilor, acest fapt poate fi efectul unor:

✚ *cauze interne*: lipsa deprinderilor elementare de gândire matematică în clasele primare, percepția gradului de dificultate sporit al conținuturilor din gimnaziu și, în general, teama de eșec, atât a elevilor cât și a profesorilor;

✚ *factori externi*: *familia* (așteptări nerealiste - necorelare între cerințele părinților și capacitățile elevului, atitudinea negativă a familiei conform preconcepției că matematica e o știință dificilă, greu de înțeles); *practicile de învățare* (centrare pe verificare, slaba recompensare a performanței, etichetarea elevilor, sancțiunea negativă, folosirea de resurse și metode de învățare neatractive, lipsa de semnificație a unor cunoștințe, necorelarea cu stilurile de învățare sau tipurile de inteligență ale elevilor, accent pe memorare și reproducere, nivelul ridicat de dificultate al limbajului matematic și slaba aplicare a conceptelor matematice); *mediul social* (modele de așa-zis succes social bazate pe alte valori decât cele oferite de educație, influența anturajului, slaba motivație de a urma o carieră didactică în urma scăderii statutului socio-economic).

Profesorii participanți la studiu dovedesc că sunt buni cunoscători ai tehnicilor de motivare a învățării și încearcă să compenseze, prin metode și tehnici adecvate, calitatea motivațională slabă ale manualelor.

Extrase din discuții:

„Conform studiilor de psihologie, fobia poate fi atât de mare în cazul unor copii, încât creierul lor reacționează la vederea numerelor la fel ca la vederea unei creaturi înspăimântătoare, cum ar fi un șarpe sau păianjen, fapt care reduce exact activitatea zonelor care ar trebui să fie cel mai intens solicitate - cele legate de raționament și procesarea informației. Există exerciții, care s-au dovedit a reduce anxietatea elevilor și permit să se concentreze pe munca lor, fără a fi influențați de frică. Aceste exerciții simple includ exprimarea sentimentelor și frământărilor lor înainte de test, reafirmarea punctelor lor tari.” (I.V.)

„Eu predau la gimnaziu și pot spune că motivația pentru studiul matematicii este destul de mare la începutul clasei a V-a. Elevii, îndemnați de părinți cred că matematica este importantă, sunt dornici să învețe. Depinde de noi să facem cât mai lină trecerea de la ciclul primar la gimnaziu, să păstrăm un echilibru între rigoare și intuiție. Noile noțiuni trebuie să fie introduse treptat, făcând legătura cu viața de zi cu zi și cu activitățile practice. Cred că, în acest mod, vom putea păstra motivația elevilor.” (M.P.)

„Sunt de părere că e mai important să-i învățăm pe elevi să-și dezvolte gândirea matematică (...) Ca profesor, ai obligația de a-l face pe copil să-și dorească să învețe, nu să-l forțezi să învețe.” (U.I.P.)

„Cred în explorarea matematicii de către elevi. Este esențială. Din păcate, în foarte multe cazuri, elevii sunt puși în situația de a memora algoritmi pe care nu-i înțeleg. Dacă 'scoatem' procesul gândirii din lecțiile noastre, ceea ce se și întâmplă, aceea nu e matematică. (A.V.)

„La clasa a V-a, încep în fiecare an școlar cu o scurtă istorie a numerelor naturale. La geometrie, (...) nu uit de Euclid. Există acum o serie de prezentări și filmulețe, sunt foarte utile întrucât îi scoate din rutina orelor și le îmbogățește cultura generală.” (A.G.)

„Cred că o bătălie pe care o poate câștiga sistemul educativ ar fi dacă acesta ar prelua din tehnicile adversarilor. Jocurile îi atrag pe elevi atât de mult. Uneori învață multe lucruri din ele și într-un mod plăcut. Sunt solicitante psihic, dar plac. E nevoie însă de multă creativitate în realizarea acestora. Un moment ca „Teorema lui Pitagora muzicală” nu va crea deprinderi, dar poate implica emoțional pozitiv.” (D.M.)

„Trebuie să ne adaptăm la căile de comunicare și la activitățile care plac elevilor. „Gamification” nu se referă doar la a folosi jocul în învățare, ci la trăsături ale jocurilor care îi stimulează pe elevi, adaptate activităților didactice: feedbackul imediat, situațiile incitante, competitive, grade de dificultate diferite și progresive” (I.V.)



Motivarea la matematică depinde în mare măsură de modul în care se remediază învățarea (vezi fig.21). Astfel, profesorii români folosesc următoarele măsuri de remediere a erorilor în învățare:

1. evaluări de progres și feedback stimulat;

2. suport individualizat;
3. metode de învățare în grup;
4. sancțiuni pentru a stimula efortul de a învăța;
5. meditații acasă.

8. Alegeți trei variante de răspuns pentru modul în care tratați erorile în învățarea matematicii:

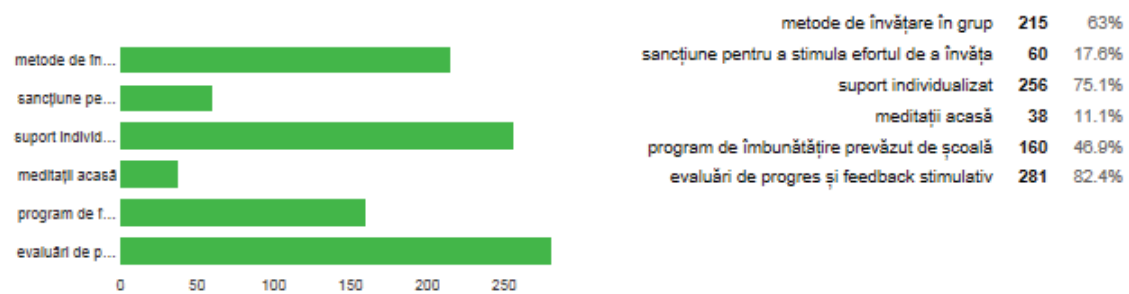


Fig. 21. Remedierea erorilor la matematică

Studiul nostru a surprins, în egală măsură, punctele tari și punctele slabe ale diferitelor componente ale educației matematice. Punctele slabe pot fi diminuate prin aplicarea unor *strategii de motivare la nivel național*. Din păcate, trebuie să acceptăm realitatea: aceste strategii nu există, ele trebuie create. Din lista propusă, o primă intervenție vizează *corelarea școlii cu piața muncii*, în opinia a 49% din profesori. De asemenea, *reușita școlară a tuturor elevilor* (40,2%) trebuie să fie nu doar o aspirație transpusă normativ în anumite scopuri, ci și un mobil motivațional puternic. Alte strategii fac referire la *asigurarea șanselor egale la educație* pentru toți copiii (15%), *obținerea unui loc mai bun în clasamentele internaționale* (TIMSS, PISA) și *educația de elită prin participarea la concursuri și olimpiade* (9,1%).

18. Alegeți o variantă pentru cea mai bună strategie de motivare națională în învățarea matematicii:

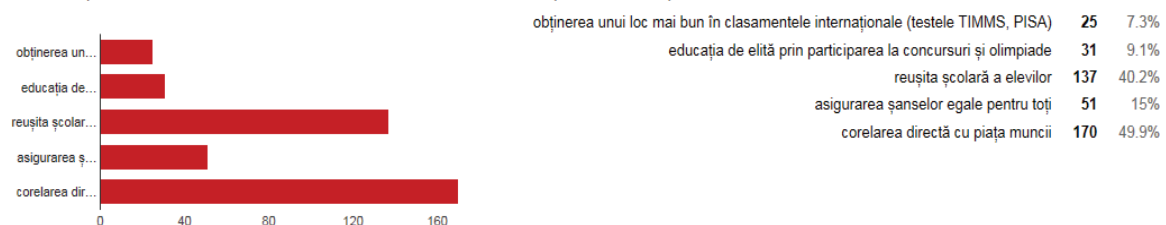


Fig. 22. Strategii de motivare națională

7. UTILIZAREA TEHNOLOGIEI

Utilizarea tehnologiei este deficitară, din punctul de vedere al dotării cu echipamente și resurse, cât și al proiectării manualelor cu o astfel de deschidere.

În România, integrarea tehnologiei în educație stă sub semnul unui paradox. Deși există un cadru legal favorizant (Legea educației din 2011), care precizează importanța unui astfel de obiectiv, nu s-a reușit concretizarea lui. La nivel declarativ, curriculumul pentru învățământul primar și gimnazial se axează pe cele opt domenii de competențe-cheie ce determină profilul de formare al elevului.

Deși competențele digitale fac parte din acest profil, modalitățile reale de dezvoltare a acestora prin utilizarea tehnologiei ca instrument de învățare, sunt rare.

Cadrele didactice participante la discuțiile din grupuri formulează un punct de vedere comun, conform căruia tehnologia ar trebui să fie folosită, ca pondere, între 5 și

20% din programul școlar. Premisa importantă este, însă, *proiectarea resurselor (manualelor)*, astfel încât să se prezinte în mod adaptat și complementar, varianta digitală a temelor și aplicațiilor.

Perfecționarea cadrelor didactice trebuie să aibă în vedere în primul rând educația tehnologică informatică. Va trebui ca examenele de promovare și titularizare să fie adaptate acestei componente deloc formale, pentru că de ea va depinde masiv readucerea educației școlare alături de elev."

(prof. dr. R. Gologan, SSMR)



OPINII ALE PROFESORILOR

PUNCTE TARI

- ✓ Majoritatea profesorilor recunosc valoarea adăugată a tehnologiei în învățarea matematicii. Dar totul este formulat în termeni potențiali, generici întrucât, afirmă aceștia, există mai curând obstacole decât oportunități în utilizarea tehnologiei:

- 📌 platformele educaționale pot fi un excelent suport pentru perfecționarea predării prin diseminarea de bune practici, proiecte de lecție sau modele de teste de evaluare;
- 📌 internetul poate facilita comunicarea pentru diferitele categorii de elevi, inclusiv elevi cu nevoi speciale; poate permite accesul la informație din surse multiple;
- 📌 programarea poate fi modul ideal de a verifica înțelegerea cunoștințelor matematice, permițând o mai eficientă evaluare a acestora;
- 📌 calculatorul poate contribui la valorificarea componentei intuitive a predării/învățării;
- 📌 poate integra cu succes activitatea ludică ce atrage în special vârstele mici;
- 📌 poate transforma aspectul rutinier al lecției de 50 min., astfel încât să devină interactivă;
- 📌 jocurile digitale pot avea o eficiență cognitivă remarcabilă;

-  calculatorul poate prelua parțial calculul matematic, ca abilitate matematică simplă, pentru a oferi elevilor oportunitatea de a se concentra pe raționament, una din capacitățile cognitive cele mai complexe.
- ✓ O serie de inițiative de învățare vizează familiarizarea elevilor cu mediile de programare.
- ✓ Există programul „200 de euro” pentru achiziționarea unui calculator pentru familiile cu venituri mici.
- ✓ Catalogul online se poate utiliza la scară largă.
- ✓ Există în cadrul școlilor, centrele ECDL pentru evaluarea competențelor digitale.
- ✓ Resursele digitale s-au dovedit utile în special în activitățile extracurriculare: elevii se documentează, colaborează, comunică, realizează site-uri, fac prezentări de proiecte etc.

PUNCTE SLABE

- ✓ Slaba infrastructură și dotarea insuficientă cu echipamente sunt obstacolele cele mai importante; accesul la Internet în spațiul școlii este limitat, în timpul orelor de curs.
- ✓ Numărul insuficient de calculatoare face ca 2-3 elevi să fie repartizați la un calculator în sala de laborator.
- ✓ Nu toți profesorii au competențele necesare pentru utilizarea instrumentelor digitale.
- ✓ Resursele digitale dedicate matematicii școlare oferite de Google, Microsoft nu sunt foarte populare în rândul profesorilor.
- ✓ Platformele de învățare existente (MOODLE, INSAM, AEL, Geogebra, softuri oferite de Intuitext, MyKoolio) nu sunt utilizate suficient.
- ✓ Varianta online a unor concursuri școlare clasice este considerată inadecvată.
- ✓ Lipsa de instruire pentru a putea integra tehnologia în cadrul lecțiilor este un punct slab al formării inițiale și continue.
- ✓ Smartboard-urile nu au, de cele mai multe ori, softuri educaționale adecvate, fiind utilizate minimal, doar pentru scriere.
- ✓ Nu există sugestii pentru utilizarea tehnologiei în programele de matematică.

Extrase din discuții

„Unele site-uri au tutoriale bune și oricine se poate descurca, mai ales dacă are puțină experiență. Geogebra, însă, e un instrument complex care necesită instruire pentru a o folosi. Sunt bune și manualele online. (...)Fie profesorul poate crea materiale, cu care elevii doar să interacționeze pentru a verifica proprietățile, fie li se poate cere elevilor să ilustreze teoreme/probleme sau să verifice/descopere proprietăți. Din experiența mea, le place foarte mult.” (I.V.)

„Copiii, care sunt nativ digitali, se simt foarte confortabil cu tehnologia. Eu am elevi care, deși nu au note prea bune, mă ajută să mă pot conecta la Internet sau să remediez vreo problemă.” (M.P.)

„Nu știu dacă trebuie să facem marea revoluție în programă, ci doar în aplicarea ei (...). La nivel de manuale, ar trebui să luăm exemplul altora: manualele internaționale pentru IB și cele din Franța au secțiuni de utilizare a calculatorului la fiecare lecție”. (C.C.G.)

În opinia unui profesor „folosirea calculatorului poate deplasa accentul în învățare de la algoritm la concept”. Alteori, reprezentările profesorilor sunt un indiciu pentru gradul de acceptare a tehnologiei:

„Eu nu folosesc în timpul orei de matematică nici tehnica, nici internetul. Ca profesor, am un complex al „mijloacelor moderne”, în sensul următor: nu am un bun exercițiu al folosirii acestor mijloace și cred că le evit dintr-un fel de nesiguranță. (...), dar calculatorul poate fi un adjuvant.” (Profesor, discuție facebook)

„Într-o țară cu resurse reduse și mijloace materiale puține, dezvoltarea se poate realiza mai ales folosind inteligența nativă. Aceasta se fructifică prin educație și integrarea tinerilor în circuitul mondial al tehnologiilor. Formarea unor specialiști de acest tip nu se poate realiza fără deprinderi matematice consistente.”

(prof. dr. Doru Ștefănescu, SSMR)



Conform observației respondenților, elevii folosesc în mică măsură calculatoarele în clasă. Nici laboratorul nu este cel mai frecventat spațiu de învățare, dat fiind numărul mic

de laboratoare din școli și capacitatea lor redusă (vezi graficul 23b.)

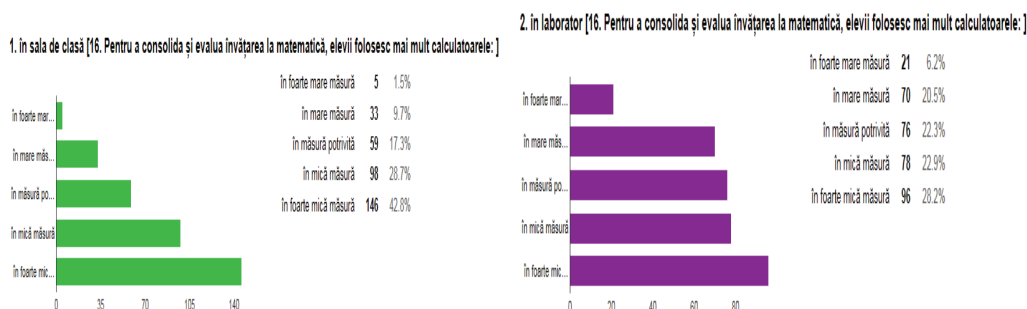


Fig. 23. Utilizarea calculatoarelor a). în clasă b). în laborator

O opțiune mai susținută este cea legată de folosirea independentă a calculatorului pentru învățarea matematicii, și anume *acasă*. Așa cum reiese din graficul de mai jos, 28,2%, respectiv 25,6% din profesori indică tehnologia de acasă ca fiind un instrument

util. Un procent asemănător îl are și utilizarea dispozitivelor mai flexibile, de tipul tabletei, smartphone-ului sau laptopului.

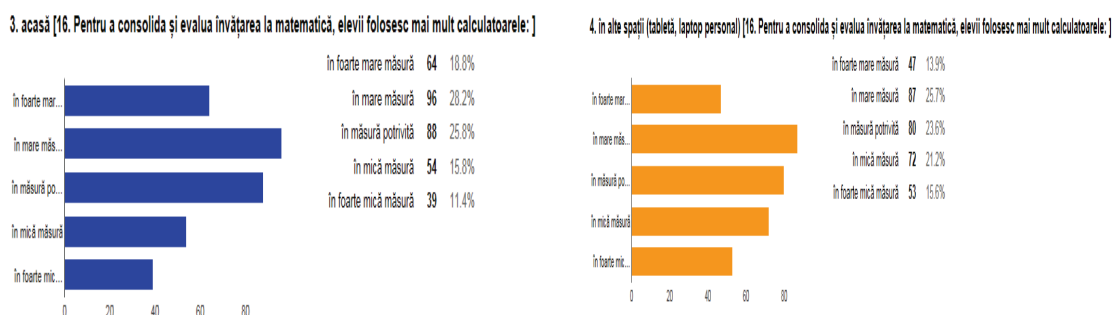


Fig. 24. Utilizarea calculatorului a). acasă b). alte instrumente digitale

Mai jos, prezentăm o listă a activităților pe care le realizează elevii cu ajutorul calculatoarelor, în funcție de frecvența cu care apar în comportamentele acestora (în urma observațiilor profesorilor):

1. verifică rezultatele;
2. fac calcul matematic;
3. rezolvă problemele mai complexe;
4. reprezintă grafic date matematice;
5. realizează simulări pe teste standardizate;
6. dezvoltă singuri aplicații digitale.

Din comportamentele de învățare listate mai sus, două au înregistrat opțiunea preferențială a cadrelor didactice: elevii *verifică rezultate* și *fac calcul matematic*, ceea ce indică utilizarea calculatorului ca instrument de măsurare. Deși este cunoscută eficiența tehnologiei în *reprezentarea grafică a datelor matematice*, doar 5,5% , respectiv 13,8% din profesori identifică în mare măsură aceste activități de învățare. Procente foarte scăzute, între 1,5% și 7,7% sunt estimate ca fiind apanajul unei categorii de elevi cu abilități de *creare a aplicațiilor digitale* (vezi fig.25).

Se recunoaște nevoia unei mai bune conectări a matematicii cu informatica.

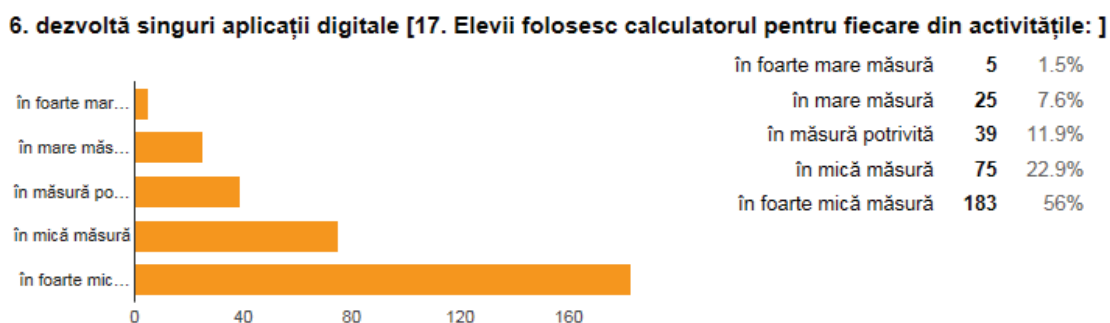


Fig. 25. Elevii dezvoltă aplicații digitale

Evaluarea electronică nu este o practică uzitată în școala românească. *Simularea prin teste standardizate*, care ar oferi o bază certă de antrenament în vederea examinărilor și examenelor, nu este familiară celor mai mulți elevi (vezi fig. 26).

3. realizează simulări pe teste standardizate [17. Elevii folosesc calculatorul pentru fiecare din activitățile:]

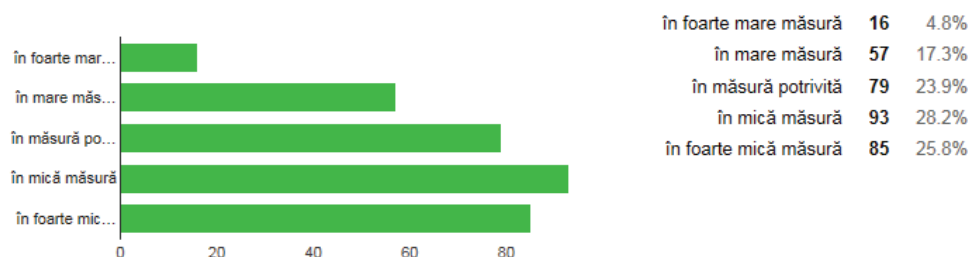


Fig. 26. Utilizarea calculatorului pentru evaluare

Profesorii enumeră resurse digitale utilizate în activitățile cu elevii:

Resurse digitale utilizate de profesori:

platforma Matedidactica, Google Apps for Education, Wolframalpha, Geogebra, Desmos, dicționare ilustrate online (<https://www.mathsisfun.com/definitions/index.html>), Kahoot, <http://teste-matematica.wikispaces.com/>, softuri precum Maple, MathLab, MathCad, pagina FB "Geogebra în România, site-uri: <http://matoumatheux.ac-rennes.fr/accueil>, <http://isthisprime.com/game/>, tutoriale pentru elevi pe youtube, <http://matoumatheux.ac-rennes.fr/.../decimaux/college/ou.htm>.

III. CONCLUZII

Invitați să identificați *dificultățile din educația matematică*, participanții la studiul prezent listează ierarhic câteva din neajunsuri (vezi fig. 27):

1. curriculumul școlar, nerealist și dificil de aplicat;
2. lipsa unor resurse care să susțină activitatea;
3. lipsa de corelare între curriculum (ceea ce se predă) și evaluare (ceea ce se evaluează);
4. formarea inițială deficitară a profesorului;
5. lipsa/dificultăți de acces și utilizare a tehnologiei;
6. slaba colaborare în comunitatea educațională;

7. lipsa de pregătire metodică a profesorilor.

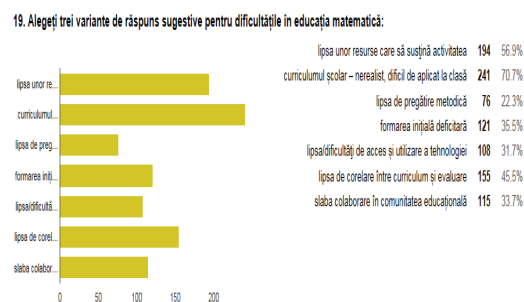


Fig. 27. Dificultăți în educația matematică

În urma studiului realizat de către echipa Societății de Științe Matematice, redăm sintetic concluziile pentru fiecare componentă analizată a EM:

1. Rolul educației matematice

În opinia participanților la studiu, cel mai important rol al educației matematice este *pregătirea pentru piața muncii*. Acesta este urmat de *accesul la educația de bază, elementară* (conferindu-se educației matematice, rolul cultural definitoriu pe care aceasta îl are) și *accesul la profesiile științifice* (cunocute ca fiind profesii bine cotate din punct de vedere social). Conform percepției profesorilor, curriculumul național îndeplinește parțial rolurile menționate. În consecință se conturează așteptarea conform căreia, pe viitor, autorii CN ar trebui să aibă în vedere concretizarea acestor roluri.

Asumarea cu succes a acestor roluri este influențată de concepția care stă la baza proiectării curriculumului. A fost evidențiată în special promovarea matematicii ca domeniu abstract sau ca un set de algoritmi și reguli. Prezentarea matematicii ca știință aplicată este un obiectiv neatins de către autorii curriculumului actual.

2. Curriculumul

Calitatea curriculumului, este, în ansamblu, contestată de practicieni. Cele mai frecvente neajunsuri vizează natura conținuturilor în matematică: lipsa referirilor la suportul intuitiv al resurselor de învățare, absența inter-, transdisciplinarității și algoritmizarea excesivă. Alte critici fac referire la lipsa de continuitate între programele școlare pe niveluri de școlaritate succesive.

În cadrul studiului s-a conturat un consens general, conform căruia resursele utilizate la clasă (manuale, culegeri) nu asigură un suport optim în învățare. Conexiunile cu alte discipline, nevoia de modele de rezolvare și demonstrații matematice, de aplicații destinate consolidării, cu un grad diferențiat de dificultate sunt câteva din cerințele formulate.

3. Practicile de instruire

Practicienii din educație constată faptul că, prin modul în care este proiectat și, în consecință, aplicat la clasă, curriculumul matematic este unul din factorii ce generează strategii de instruire bazate pe memorare și rutină. Se vehiculează opinia conform căreia abilitățile metodice ale profesorilor influențează decisiv modul în care se realizează instruirea la clasă. Din acest motiv, în cele mai multe cazuri, instruirea la clasă este intens dirijată, predictibilă. Cu referire la metodele uzitate la clasă, în ierarhia creată de profesorii chestionați, se situează: exercițiul, explicația și rezolvarea de probleme. Alți profesori participanți la studiu, în număr mai mic, exponenți ai unei categorii profesionale bine pregătite, aplică în mod creativ metoda predării cu ajutorul resurselor digitale.

4. Evaluarea performanțelor elevilor

Reușita școlară a elevului este influențată de modul în care acesta răspunde normelor de evaluare și nu de progresele individuale realizate prin învățarea autonomă. Conform opiniei profesorilor, performanțele sunt condiționate de cunoașterea anterioară solidă, antrenamentul pentru examene și simularea prin teste similare. Capacitatea de aplicare a cunoștințelor matematice este o abilitate exersată minimal în evaluare, sub forma folosirii formulelor în diferite exerciții sau a unei succesiuni de pași în rezolvarea problemelor de tip matematic.

Evaluările care au loc, atât cele formative (pe parcursul activităților), cât și cele de bilanț (evaluări naționale, bacalaureat), vizează în special deprinderile matematice și foarte puțin strategiile de gândire și raționamentul logico-matematic.

5. Formarea profesorilor

În România, pregătirea profesorilor este deficitară, cauza identificată fiind lipsa unor masterate didactice eficiente și a unor stagii de perfecționare utile care să fie coordonate de către universități cu tradiție în educație. Formarea inițială a profesorilor trebuie regândită integral, astfel încât pregătirea practică și metodică să aibă utilitatea așteptată.

Așa cum reiese din studiu, profesorii apelează în mod constant la alternative de dezvoltare profesională (atelieri, conferințe, cursuri), de unde se poate deduce apetitul pentru modalități de formare continuă mai puțin convenționale.

6. Motivarea în învățarea matematicii

Profesorii români semnalează scăderea treptată a motivației pentru studiul matematicii pe parcursul anilor de gimnaziu și liceu. Cauzele sunt multiple. Cele mai des evocate fac trimitere către concepția resurselor folosite (lipsa de semnificație a conceptelor matematice, accent pe memorare și reproducere, nivelul ridicat de dificultate al limbajului matematic) și modul în care se realizează instruirea la clasă (centrarea pe verificare, slaba recompensare a performanței, sancțiunea negativă, folosirea de resurse și metode de învățare neatractive).

7. Utilizarea tehnologiei

Profesorii români consideră că aplicarea tehnologiei în învățarea matematicii este deficitară, din punctul de vedere al dotării cu echipamente și resurse, cât și al proiectării manualelor cu o astfel de deschidere. Aceasta trebuie promovată în mod susținut, prin instruirea profesorilor și prin includerea sugestiilor de utilizare în curriculumul matematic. Practicienii recunosc valoarea adăugată a tehnologiei și promovează, în urma experiențelor proprii, eficiența resurselor digitale în învățarea matematicii.

Lista figurilor

Fig. 1. Caracteristici generice ale profesorilor

Fig. 2. Percepția profesorilor asupra rolului educației matematice

Fig. 3. Contribuția curriculumului național la realizarea rolurilor EM

Fig. 4. Percepția asupra matematicii școlare: a). ca domeniu abstract; b). ca ghid de gândire logică

Fig. 5. Percepția asupra matematicii școlare: a). ca domeniu creativ; b) ca știință aplicată

Fig. 6. Ierarhia comportamentelor de învățare

Fig. 7. Continuitatea între niveluri

Fig. 8. Cerințe: a). necesitatea aplicațiilor matematice; b). conexiunea cu alte discipline

Fig. 9. Cerințe: a). consolidarea achizițiilor; b). exerciții cu dificultate diferită

Fig. 10. Nevoia de modele de demonstrație și rezolvare

Fig. 11. Nevoia de a reduce volumul cunoștințelor

Fig. 12. Frecvența unor metode de învățare

Fig. 13. Forme de organizare în studiul matematic

Fig. 14. Factori de influență a). cunoașterea anterioară; b). antrenamentul pentru examene

Fig. 15. Factori de influență: a). capacitatea de aplicare a cunoștințelor; b). pregătirea suplimentară

Fig. 16. Simularea prin teste similare

Fig. 17. Frecvența unor metode de evaluare

Fig. 18. Activități profesionale; a). pregătirea lecțiilor b). consultații de remediere

Fig. 19. Sarcini administrative

Fig. 20. Consolidarea materiei

Fig. 21. Remedierea erorilor la matematică

Fig. 22. Strategii de motivare națională

Fig. 23. Utilizarea calculatoarelor a). în clasă; b). în laborator

Fig. 24. Utilizarea calculatorului a). acasă; b). alte instrumente digitale

Fig. 26. Utilizarea calculatorului pentru evaluare

Fig. 25. Elevii dezvoltă aplicații digitale

Fig. 27. Dificultăți în educația matematică

ANEXA 3. STUDIUL 3

EDUCAȚIA MATEMATICĂ DIN ROMÂNIA

DIRECȚII DE ACȚIUNE



EDUCAȚIA MATEMATICĂ ÎN ROMÂNIA

DIRECȚII DE ACȚIUNE

1. ROLUL EDUCAȚIEI MATEMATICE

Rolul educației matematice constă în crearea suportului pentru formarea unei culturi științifice. De asemenea, acesta vizează formarea abilităților de a raționa corect și de a aplica matematica în situații concrete. Acest rol va fi îndeplinit dacă matematica va fi prezentată elevilor ca un limbaj al științei, deci în mod interdisciplinar, în corelație cu fizica, chimia, biologia, economia etc.

2. CURRICULUMUL MATEMATIC

Recomandări pe baza concluziilor din proiect

- Reactualizarea ghidului pentru profesori elaborat de MENCS cu exemple de bune practici, în vederea urmăririi în practica instruirii a dezvoltării competențelor din programele școlare;
- Evidențierea, în cadrul programelor școlare, a activităților menite să dezvolte creativitatea și imaginația elevilor;
- Corelarea pe orizontală a acelor noțiuni matematice care se regăsesc în conținuturile mai multor discipline;
- Crearea unui ghid care să faciliteze corelarea programelor cu manualele existente deja;
- Realizarea corespondențelor între conținuturile evaluărilor naționale și cele din programele școlare.

3. PRACTICILE DE INSTRUIRE

Recomandări pe baza concluziilor din proiect

- Elaborarea de lecții demonstrative supuse expertizei metodice și diseminarea acestora pe o platformă națională;
- Proiectarea materialelor de învățare în mod concret, intuitiv, fără formalizarea exagerată, specifică celor mai multe auxiliare existente;
- Identificarea reală a nevoilor de învățare ale elevilor prin analize frecvente de tip diagnoză și de progres;

- Crearea unor programe de mentorat centrate pe abilitarea metodică a studenților, viitori profesori și a debutanților;
- Monitorizarea aplicării la nivelul fiecărei școli a regulamentului privind achiziția de materiale didactice și resurse educaționale;
- Elaborarea de standarde de evaluare orientative în învățarea matematicii;
- Abordarea interdisciplinară a matematicii, care poate produce inovare la nivelul practicilor de instruire;
- Crearea și utilizarea de platforme care să promoveze resursele digitale ca suport în învățarea matematicii.

Direcții de acțiune ale Societății de Științe Matematice din România

- Popularizarea Școlii de Vară a SSMR în rândul cât mai multor profesori de matematică. Aceasta își propune promovarea învățământului de excelență și formarea unui corp de cadre didactice care să se ocupe de pregătirea elevilor cu performanțe deosebite la matematică. Programul are o durată medie de 60 de ore și cursurile sunt [acreditate de MECTS](#);
- Organizarea unor ateliere de lucru zonale după modelul altor inițiative de succes, precum seminarul de la Poiana Negrii, eveniment ce oferă prilejul unor discuții între profesorii de matematică din mai multe județe, discuții legate de problemele curente ale educației matematice din România;
- Participarea activă la seminarii ale filialelor SSMR, seminarii care au ca scop creșterea expertizei prin rezolvarea problemelor din *Gazeta Matematică* (<http://gmb.ssmr.ro/>);
- Diseminarea în medii școlare diverse a publicației *Didactica Matematică* (<http://gmb.ssmr.ro/>);
- Includerea în *Didactica Matematică*, la rubrica deja existentă *Modele de lecții*, a unor materiale didactice elaborate de către profesori din țară, avizate de specialiștii de la nivelul filialelor.

4. EVALUAREA PERFORMANȚELOR

Recomandări pe baza concluziilor din proiect

Testarea la clasă

- Este important ca testarea la clasă să fie realizată atât individual, cât și în grup și/sau colectiv. Trebuie avute în vedere atât evaluarea capacității de înțelegere și utilizare a noțiunilor matematice, cât și modelarea matematică a diverselor fenomene din natură sau societate. Se recomandă, de asemenea, utilizarea de

probleme dezvoltate pe principiul trecerii de la simplu la complex, similare celor din testările internaționale;

- Devine utilă, în contextul învățării eficiente, testarea periodică a performanțelor matematice ale elevilor.

Testarea standardizată

- Metodele de testare aplicate la nivel național ar trebui adaptate nivelului de competență al elevilor și profilului școlilor, conform unor standarde specifice;
- Sunt necesare modalități de dezvoltare a profesorului ca evaluator, prin utilizarea unor metode psiho-pedagogice certificate de măsurare a cunoștințelor matematice;
- Referitor la testările internaționale, este necesară familiarizarea elevilor cu tipul de probleme și sistemul de verificări folosite de institutele de sondare;
- Se recomandă folosirea platformelor de testare online, realizate de profesioniști în domeniu (Brio, MyKoolio etc.).

Examene naționale

- Este necesar ca, în conformitate cu Legea Educației, admiterea în liceu să se realizeze prin examene proprii școlilor, atunci când numărul de candidați este mai mare decât numărul de locuri; de asemenea, portofoliul educațional al elevului ar trebui să devină un reper important în procesele de selecție;
- În ceea ce privește examenul de bacalaureat, disciplina matematică trebuie să fie obligatorie la toate formele de învățământ, cu diferențierea pe trei niveluri: C (cunoștințe elementare cu verificarea gândirii logice), B (profil real și profesional, cu testarea modului de utilizare a cunoștințelor), A (absolvenți ce vor urma profil universitar tehnic sau ce necesită cunoștințe matematice superioare). Se va realiza astfel dezideratul majorității universităților cu profil real, acela de a aplica criterii de admitere obiective.

Direcții de acțiune ale Societății de Științe Matematice din România

- Crearea unei baze de date cu teste-model, raportate la standarde diferite, pentru toate nivelurile, profilurile și specializările; de asemenea, diverse metodologii, modalități de testare etc.;
- Participarea profesorilor de matematică la activitatea CNEE (un exemplu este publicarea din 2009 a celor 100 de variante pentru bacalaureat);
- Implicarea SSMR în procesul de evaluare al profesorilor, cu referire la conceperea subiectelor pentru concursul de titularizare și examenul de definitivat.

5. FORMAREA PROFESORILOR

Recomandări pe baza concluziilor din proiect

- Obligatorietatea masteratului didactic pentru toți profesorii ce vor predă la nivel liceal și gimnazial;
- Parcurgerea de către profesorii debutanți a unui stagiul de mentorat de 1-2 ani;
- Implicarea doar a universităților de prestigiu, cu tradiție în formarea profesorilor, în activitatea de perfecționare și concursurile de obținere a gradelor didactice;
- Consultarea profesorilor universitari cu privire la tematica și subiectele de evaluare specifice examenelor de definitivare și de titularizare;
- Asigurarea caracterului public al lucrărilor științifico-metodice de grad didactic, prin crearea de către fiecare universitate a unei baze de date care să poată fi accesată de profesioniștii domeniului.

Direcții de acțiune ale Societății de Științe Matematice din România

- Organizarea de concursuri dedicate profesorilor, prin care să fie selectate modele de lecții inovative și atractive, care să fie diseminate prin intermediul unei baze de date cu acces facil pentru toți profesorii din România. Câștigătorii acestor concursuri pot contribui la viitoarele proiecte ale SSMR;
- Inițierea și continuarea unor parteneriate profesionale pentru a realiza în mod concret proiecte colaborative și de dezvoltare a organizației;
- Continuarea cursului acreditat de MENCS, organizat anual de către SSMR la Bușteni, care are ca scop realizarea unor activități cu caracter didactic și metodic; generalizarea acestui tip de formare la nivelul filialelor SSMR;
- Realizarea unui ghid metodologic de înțelegere și aplicare a programelor de nivel gimnazial și/sau liceal;
- Publicarea în mod periodic în revistele de matematică ale SSMR (de exemplu, Didactica Matematică) a unor modele de lecții în care se folosesc metode inovative.

6. MOTIVAREA ÎN ÎNVĂȚAREA MATEMATICII

Recomandări pe baza concluziilor din proiect

- La nivel de conținuturi, se recomandă ca resursele de învățare: să conțină în mod explicit exemple privind utilitatea matematicii în viața reală, precum și elemente de legătură cu alte științe; să dezvolte teme de istoria matematicii; să respecte principiile învățării intuitive specifice etapelor de vârstă mică;

- La nivel de strategii de motivare, se recomandă să existe manualul profesorului, care să includă: metode și tehnici de motivare în învățare, standarde de performanță minimale, medii și superioare, exemple privind importanța matematicii în diverse profesii, modele de activități colaborative, momente de reflecție asupra învățării etc.

Direcții de acțiune ale Societății de Științe Matematice din România

- Elaborarea unor materiale auxiliare care să ofere suport profesorilor și elevilor în predarea, respectiv învățarea de tip transdisciplinar;
- Inițierea de evenimente care să evidențieze rolul matematicii în societatea modernă;
- Expunerea publică a poziției SSMR față de o serie de aspecte concrete din educația matematică;
- Participarea unui colectiv de specialiști (profesori universitari, cercetători, profesori din învățământul preuniversitar) cu rol consultativ în procesul de elaborare curriculară inițiat de MENCS;
- Elaborarea manualului profesorului.

7. UTILIZAREA TEHNOLOGIEI

Recomandări pe baza concluziilor din proiect

- Includerea în curriculum a unor sugestii metodologice de utilizare a tehnologiei;
- Instruirea profesorilor astfel încât toți să fie capabili să utilizeze tehnologia;
- Oferirea de oportunități legate de accesul la biblioteci virtuale și achiziția de softuri educaționale;
- Realizarea unui manual cu exemple de utilizare ale calculatorului.

Direcții de acțiune ale Societății de Științe Matematice din România

- Crearea unei baze de date referitoare la softuri sau platforme de tip e-learning, conținând descrieri detaliate ale acestora;
- Promovarea în cadrul revistei *Didactica Matematicii* a unor exemple de integrare a resurselor digitale în lecțiile de matematică;
- Promovarea concursurilor școlare în mediul online (*Viitori Olimpici*);

Crearea unei baze de date cu ajutorul studenților din facultățile de matematică sau informatică care să prezinte modele de lecții, de proiecte didactice, activități, modele de rezolvare, teste de evaluare etc.

Descompunerea numerelor naturale în factori primi

Clasa: a VI-a

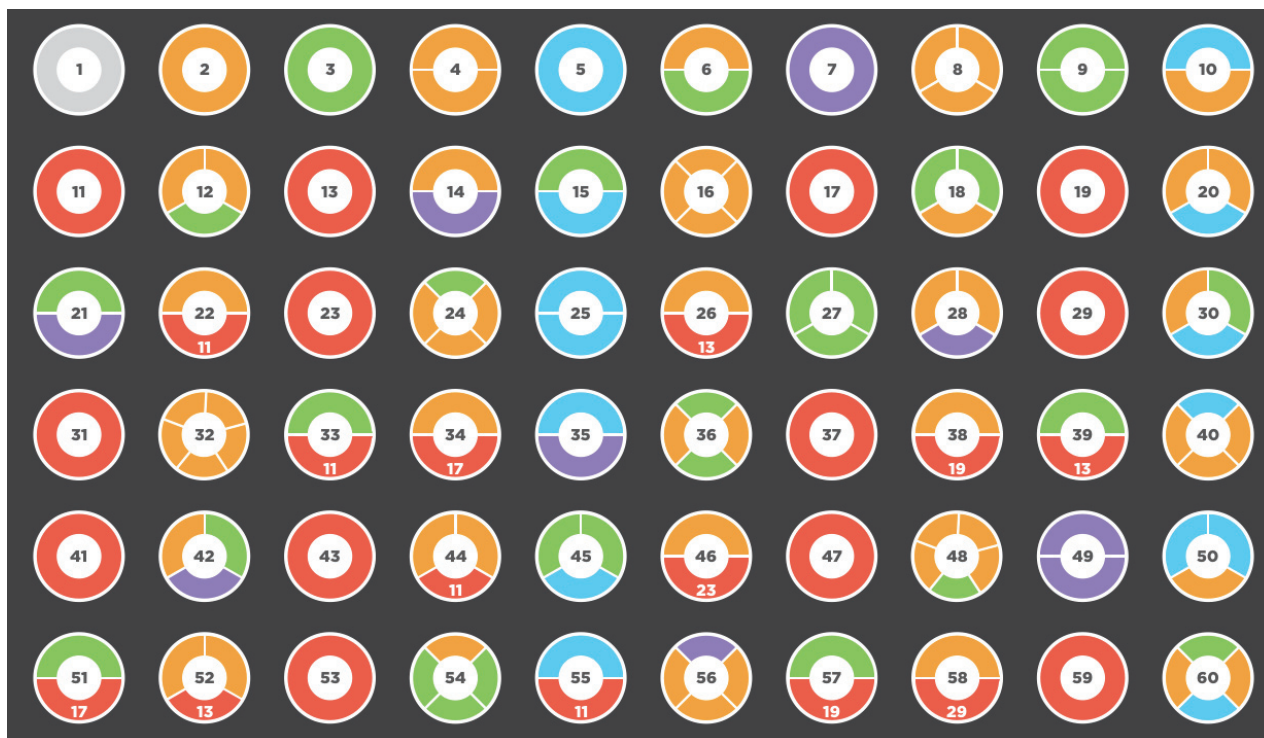
Nivel: Mediu

Durata lecției: 2 ore

1. Warmup: (Criteriile de divizibilitate)

<https://www.youtube.com/watch?v=RIRRJ88rASE>

2. Analizați următoarea imagine:



Ce observați ?

.....

.....

Explicați de ce anumite numere sunt colorate compact cu roșu.

.....

.....

3. Este reamintită definiția numărului prim.

Definiție: Un număr natural se numește prim dacă are exact doi divizori naturali.

Câte astfel de numere credeți că există?

.....

4. Urmează demonstrația faptului că mulțimea numerelor prime este infinită.

Demonstrație: Presupunem prin reducere la absurd că mulțimea numerelor prime este finită. Fie aceasta $A = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-1}, p_n\}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, care conține toate numerele prime.Fie numărul $P = p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$. Vom demonstra că acest număr este prim și nu aparține mulțimii A . Dacă P ar fi compus, atunci ar avea ca divizor un element al mulțimii A . Fie acesta p_i , deci

$$\left. \begin{array}{l} p_i | P \\ p_i | p_1 p_2 p_3 \dots p_i \dots p_n \end{array} \right\} \Rightarrow p_i | 1, \text{ contradicție. Rezultă că } P \text{ este prim și cum } P > p_k, \forall k = \overline{1, n} \text{ rezultă } P \notin A, \text{ contradicție.}$$

False deducții, contraexemple: Orice număr de forma $p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$, unde $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ sunt primele n numere prime, este un număr prim.

$$30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$$

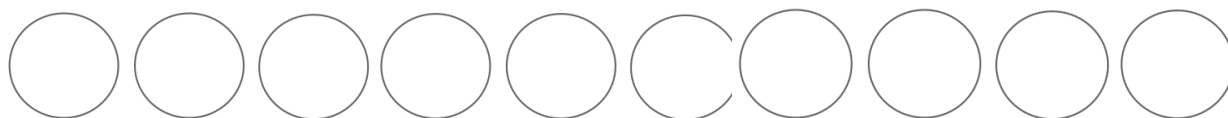
$$30031 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 59 \cdot 509 (\text{este primul număr construit astfel, care nu este prim})$$

Care sunt numerele din centrele cercurilor?



Răspuns: 90, respectiv 64

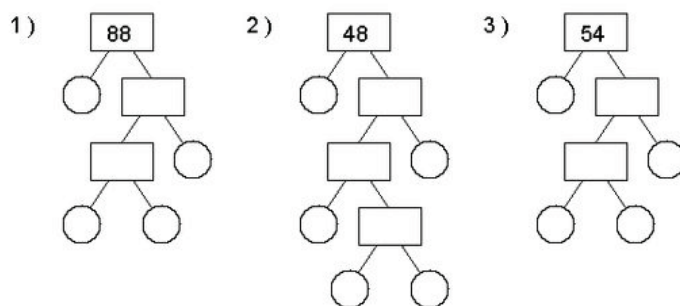
Care credeți că este următorul rând din tabelul prezentat?



5. Urmează prezentarea formală a algoritmului de descompunere a unui număr natural nenul în produs de factori primi.

Exemple:

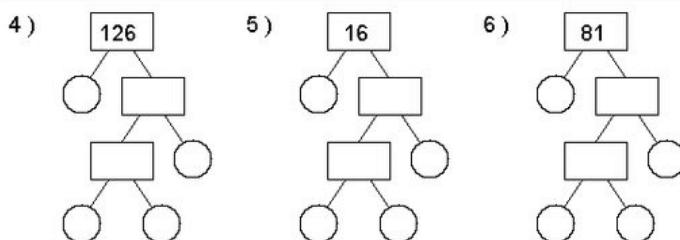
$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 6250 & 2 \\ 3125 & 5 \\ 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 6251 & 7 \\ 893 & 19 \\ 47 & 47 \\ 1 & \end{array}$$



Prime Factors
_ x _ x _ x _ = 88

Prime Factors
_ x _ x _ x _ x _ = 48

Prime Factors
_ x _ x _ x _ = 54



Prime Factors
_ x _ x _ x _ = 126

Prime Factors
_ x _ x _ x _ = 16

Prime Factors
_ x _ x _ x _ = 81

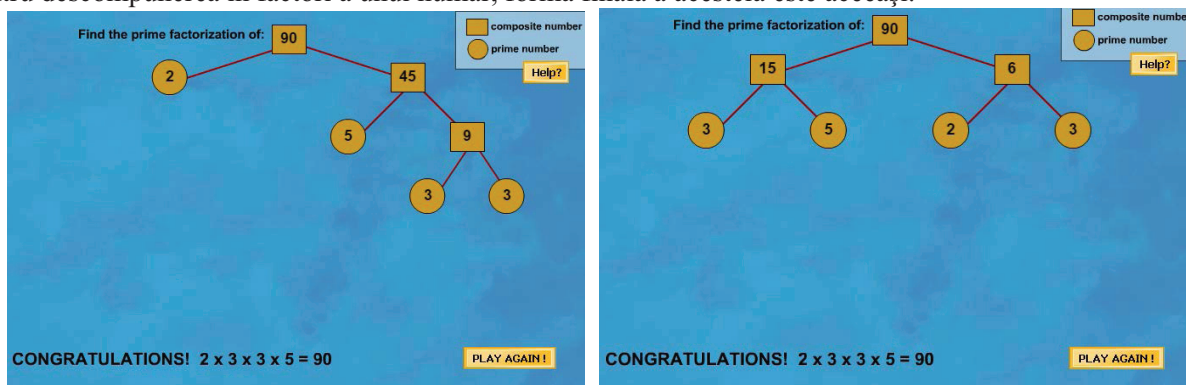


Dați exemplu de alte 3 numere care pot fi scrise în dreptunghiuri și 3 care pot fi scrise în cerceulețe. Care credeți că este semnificația dreptunghiurilor, respectiv a cerceulețelor? (Așteptăm de la copii să descopere că în dreptunghiuri se înscriu numerele compuse, iar în cerceulețe numerele prime.)

Aplicație: http://www.mathgoodies.com/factors/prime_factors.html

(aplicația cere descompunerea în factori utilizând o structură de tip arborescent.)

Prin discuții cu copiii, vrem ca aceștia să descopere că, indiferent care este calea pe care o urmează pentru descompunerea în factori a unui număr, forma finală a acestuia este aceeași.



6. Rezultatul dedus pe cale intuitivă este apoi enunțat și demonstrat riguros:

Teorema fundamentală a aritmeticii Orice număr natural mai mare sau egal cu 2 este fie prim, fie se poate reprezenta în mod unic în produs de numere prime.

(Ceea ce înseamnă că orice număr natural n poate fi reprezentat în forma $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ cu

$p_1 < p_2 < \dots < p_k$ numere prime și $r_i > 0, i = \overline{1, k}$, denumită *reprezentarea canonică* a lui n).

Demonstrație:

Pentru demonstrarea **existenței** vom folosi un raționament inductiv. Fie n un număr natural mai mare sau egal cu 2. Dacă afirmația este adevărată pentru orice număr natural mai mare sau egal cu 2 și mai mic decât n , atunci aceasta va fi adevărată și pentru n .

Dacă n este prim, atunci nu mai avem ce demonstra.

Dacă n este compus, atunci există $1 < a \leq b < n$ astfel încât $n = a \cdot b$ și cum $a < n, b < n$ utilizăm descompunerile acestora $a = p_1 p_2 \dots p_j$, respectiv $b = q_1 q_2 \dots q_k$, unde p_i, q_i sunt numere prime. Astfel, $n = p_1 p_2 \dots p_j q_1 q_2 \dots q_k$.

Pentru demonstrarea **unicității** vom utiliza Lema lui Euclid: Dacă $p | a \cdot b$ și p este număr prim, atunci $p | a$ sau $p | b$, unde $a, b \in \mathbb{N}$.

Presupunem că $n > 1$ se poate descompune în două moduri: $n = p_1 p_2 \dots p_j = q_1 q_2 \dots q_k$, unde p_i, q_i sunt numere prime. Trebuie să arătăm că $j = k$ și $\{p_1, p_2, \dots, p_j\} = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$.

Din Lema lui Euclid, dacă $p_1 | q_1 q_2 \dots q_k \Rightarrow \exists q_r$ astfel încât $p_1 | q_r$ și cum q_r este număr prim, rezultă $p_1 = q_r$. Împărțim egalitatea $p_1 p_2 \dots p_j = q_1 q_2 \dots q_k$ prin p_1 și reluăm procedeul până epuizăm toți factorii membrului stâng, rezultă $j \leq k$.

Analog, pornind din membrul drept, rezultă $j \geq k$, deci, $j = k$ și $p_i = q_i, \forall i = \overline{1, j}$.

Consecință : Dacă $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$, atunci numărul divizorilor naturali ai lui n este:

$(r_1 + 1)(r_2 + 1) \dots (r_k + 1)$.

Demonstrație: dacă $d | n$, atunci $d = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$, unde $0 \leq m_i \leq r_i$.

m_i poate fi ales în $(r_i + 1)$ moduri pentru orice i . Aplicând regula produsului, obținem concluzia.

Exemplu: $12 = 2^2 \cdot 3^1$, conform rezultatului de mai sus, numărul divizorilor lui 12 este $(2+1)(1+1) = 6$.

Pentru validare, vom enumera efectiv divizorii $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

7. Exerciții :

Antrenament

1. Care este cel mai mic număr natural care admite o descompunere în factori primi de forma $a \cdot b \cdot c$, în care numerele prime a, b, c sunt diferite ?

2. Completați :

a) $72 = 2^n \cdot 3^m$, atunci $n = \dots, m = \dots$

b) $180 = 2^n \cdot 3^m \cdot 5^p$, atunci $m + n + p = \dots$

Consolidare și performanță

1. Fie numărul $n = 100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100$. Arătați că $30^{24} \mid n$.

2. a) Aflați cel mai mic și cel mai mare număr natural în baza 10 de forma $\overline{abab}$, $a \neq b$, cu cel mai mic număr de divizori. b) Aflați cel mai mic și cel mai mare număr natural în baza 10 de forma $\overline{abcabc}$, cu a, b, c cifre distincte, cu cel mai mic număr de divizori.

3. Determinați $n \in \mathbb{N}$ cu suma divizorilor egală cu $n+1$.

4. Determinați cel mai mic număr natural a cărui descompunere în factori primi este de forma $a^b \cdot b^c \cdot c^a$, unde $a \neq b \neq c \neq a$.

5. Numim „drăguț” un număr natural $n > 1$ care este egal cu produsul divizorilor săi proprii. Găsiți primele 11 numere drăguțe și arătați că suma lor este cub perfect.

8. Feed-back

<https://play.kahoot.it/#/k/ebbc46f5-5ca0-44de-9aed-2ee915cec0b2>



Bibliografie:

1. Artur Bălăucă - Aritmetică. Algebră. Geometrie. 1200 de probleme semnificative pentru clasa a VI-a, Editura Taida
2. Ștefan Smărăndoiu, Marius Perianu, Cristian Lazăr, Dumitru Săvulescu – Matematică clasa a VI-a, Semestrul I, Editura Grup Editorial Art
3. <http://mathforlove.com/games/>
4. <http://www.mathgoodies.com/>
5. <https://www.youtube.com/>

Autori:

1. Hlevca Cristina
2. Bercovici Crina
3. Mititean Ancuța
4. Alexandrescu Andrei

Teorema Lui Pitagora

Autori : Irina Vasilescu, Gabriela Chirca, Ioana Rădulescu

Descriere: *Lecție introductivă a Teoremei lui Pitagora. Clasa a VII-a, nivel mediu*

Lecția pune accent pe colaborare, joc și investigare.

Unitatea de învățare: *Relații metrice în triunghiul dreptunghic*

Durata lecției: 100', din care timpul dedicat achizițiilor este 30'

Notă: timpii sunt orientativi.

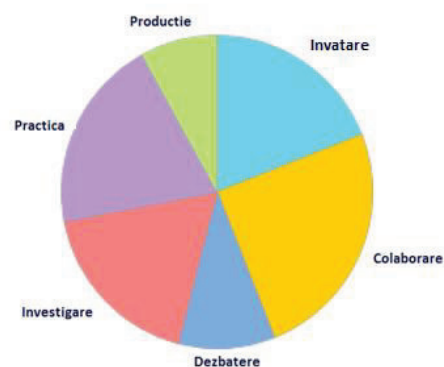
Competențe generale:

1. Identificarea unor date și relații matematice și corelarea lor în funcție de contextul în care au fost definite
2. Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunțuri matematice
3. Utilizarea algoritmilor și a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situații concrete

Obiective operaționale :

La sfârșitul lecției elevii vor putea:

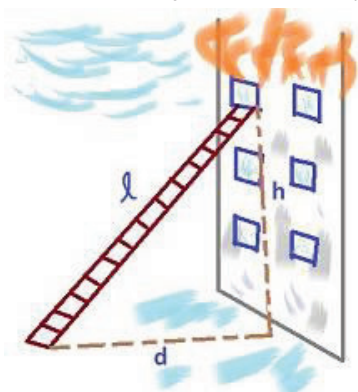
- să recunoască tipul de problemă care se rezolvă cu ajutorul teoremei lui Pitagora
- să calculeze corect, aplicând formula, lungimea unei laturi a unui triunghi dreptunghic atunci când se cunosc lungimile celorlalte două
- să caute singuri informații despre teoremă, separându-le după 3 direcții: Pitagora ca personaj istoric, demonstrații ale teoremei și idei de proiecte practice prin care să demonstreze ei înșiși teorema.
- să enunțe teorema în două moduri: 1. cu referire la lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic, 2. cu referire la ariile pătratelor construite pe laturile triunghiului.
- să explice singuri ideea unui proiect practic de demonstrare a teoremei, varianta cu ariile pătratelor (poligoanelor regulate).



Desfășurarea lecției:

- 1) Stimularea interesului elevilor prin provocări și invitații la investigare. Elevii rezolvă exercițiile a), b), c).

- a) (3') Provocare: Ajutați pompierii să aleagă scara potrivită pentru a salva victimele aflate la ultimul etaj, dacă $h=8\text{m}$ și $d=6\text{m}$. Care trebuie să fie lungimea minimă a scării ?



- b) (5') Activitate în perechi:

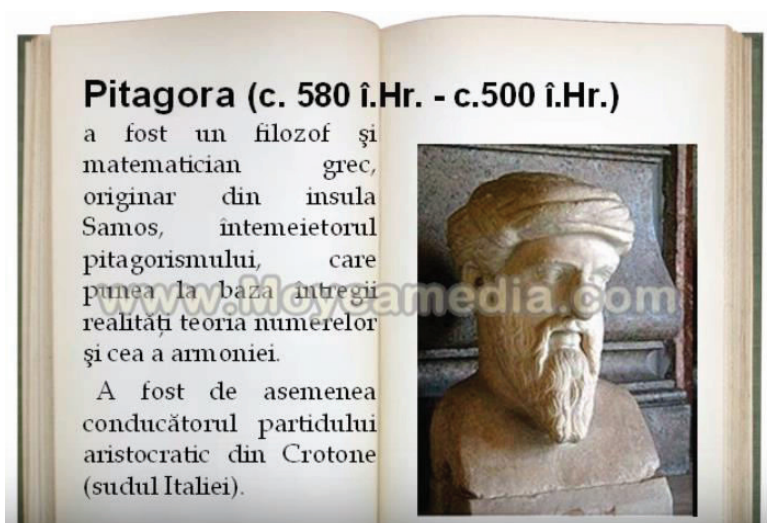
- i) Construiți, folosind rigla și echerul, triunghiuri dreptunghice cu catetele de lungimi:

a) 3 și 4; b) 4 și 5; c) 6 și 8.

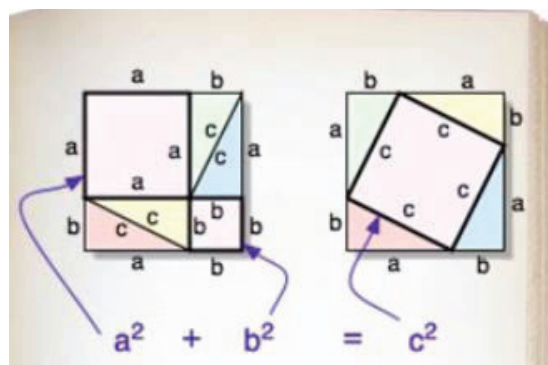
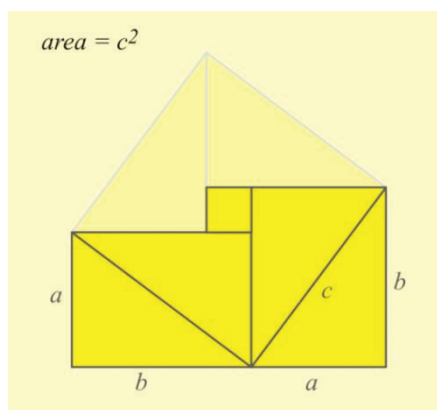
- ii) Măsurați ipotenuza primului triunghi .

- iii) Estimați lungimile ipotenzelor celorlalte două triunghiuri. Confrunțați rezultatele voastre cu rezultatele celorlalte echipe.

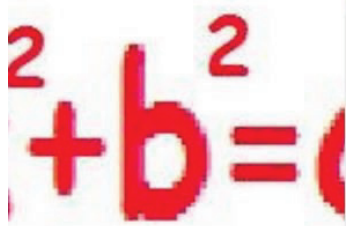
- c) (7') Urmăriți pe ecranul proiectorului filmul următor (<http://bit.ly/2j7brVK>). Notați amănuntele necesare pentru a putea răspunde apoi la întrebarea: Cine a fost Pitagora?



- 2) (10') Profesorul enunță Teorema lui Pitagora, și o demonstrează cu ajutorul elevilor (folosind teorema catetei). Acest moment se desfășoară la tablă.
- 3) (10') Elevii, ajutați de explicațiile profesorului, urmăresc pe ecranul clasei și încearcă să explice două demonstrații vizuale ale Teoremei lui Pitagora:
 - a) o animație în care suprafețele triunghiulare se rotesc, alunecă și se lipesc, demonstrația reieșind din egalitatea a două arii.(<http://bit.ly/2iPkaeu>)
 - b) imaginea care a ilustrat teorema în filmul "Cine a fost Pitagora?" (<http://bit.ly/2i7brVK> la secunda 42). Imaginea va fi desenată și pe tablă, iar demonstrația va fi construită de profesor în colaborare cu elevii.



- 4) (10') Rezolvarea la tablă a provocării și a problemei inițiale (legată de perechile de catete (3,4), (4,5), (6,8))
- 5) (8') Competiție: Elevii joacă pe tabletă sau telefon, pe platforma www.kahoot.it, jocul-test online "Teorema lui Pitagora" (<http://bit.ly/2jrigRU>).



Teorema lui Pitagora

Test scurt

Created by: ivasil Language: Român Audience: School

Plays 3 Players 7 Shares 0 Favorites 0

3. Ce origine avea Pitagora?
4. Pentru ce fel de triunghiuri este valabila Teorema lui Pitagora?
5. In orice triunghi suma patratelor este egala cu ipotenuzei.
6. Care din reprezentarile de mai jos ilustreaza Teorema lui Pitagora?
7. Este (8, 15, 17) un triplet pitagoric ?

- 6) (15') Competiția continuă: Elevii rezolvă pe grupe seturile de exerciții următoare realizate în Hot Potatoes, folosind tableta sau telefonul: <http://bit.ly/2iEiDrl>, <http://bit.ly/2inNbNj>, <http://bit.ly/2iswnHW>

Teorema lui Pitagora
Formare de perechi

Asociați răspunsul corect din coloana din dreapta

Catetele unui triunghi dreptunghic au 6 și 8 cm, atunci ipotenuza are	Alege răspunsul corect! ▼
Diagonalele unui romb au 10cm și 24 cm, atunci latura rombului are	Alege răspunsul corect! ▼
Lungimea ipotenuzei=17cm, iar a unei catete=15cm, atunci cealaltă catetă are	Alege răspunsul corect! ▼

- 7) (10') Elevii primesc fișa atașată, conținând probleme cu caracter aplicativ. În grupe de câte 4, vor alege și rezolva câte o problemă.

(Sursa: http://sorinborodi.ro/Fisiere/Pitagora_practice.pdf)

2.



Corabia cu pânze din imaginea alăturată are trei catarge, perfect verticale, având înălțimile, de la stânga spre dreapta, 12 m, 14 m și 17 m. Distanța de la catargul mic la catargul mijlociu este de 5 m, iar de la cel mijlociu la cel mare distanța este de 7 m.

- Calculați lungimea unei funii ce leagă vârful catargului mijlociu de vârful catargului mare (cu două zecimale exacte)
- Calculați lungimea unei funii ce leagă vârful catargului mijlociu de vârful catargului mic (cu două zecimale exacte)
- Stabiliți dacă vârfurile celor trei catarge sunt coliniare sau nu.

3.



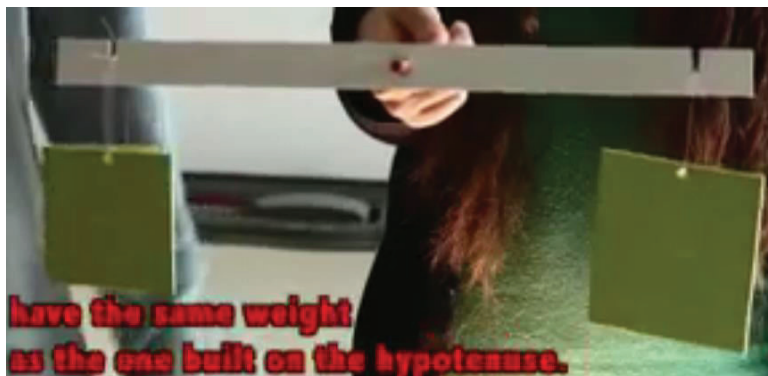
Camera din imaginea alăturată are înălțimea 2,30 m. În cameră a fost introdus un dulap, care are lungimea 1,20 m, lățimea 0,75 m și înălțimea 2,25 m. Sprijinind dulapul pe una din muchii, el trebuie pus în poziția sa normală, adică vertical. Această acțiune poate fi realizată fără a zgâria tavanul ?

- 8) (10') Profesorul lansează provocarea: Realizați în următoarele două săptămâni un proiect practic prin care să construiți una dintre demonstrațiile Teoremei lui Pitagora. Profesorul oferă o perspectivă asupra viitorului proiect, cu ajutorul videoclipurilor următoare:

- Demonstrația utilizează suprafețele unor pachete cu bomboane- <http://bit.ly/2iPsJWG> ;

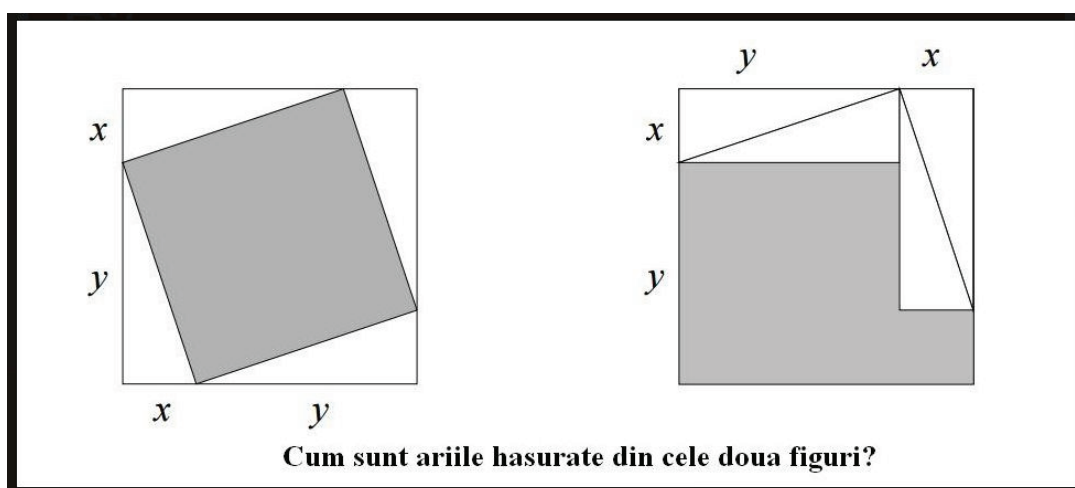


- b) Demonstrarea teoremei lui Pitagora cântărind colaje care modelează principiul conservării ariei (<http://bit.ly/2jMeIwL>). Mai multe idei de proiecte pe aceeași temă la <http://bit.ly/2j815Fa>



- 9) (4') Profesorul anunță tema pentru acasă, care are două părți:

- a) Partea obligatorie: răspundeți la întrebarea din imaginea atașată (<http://pitagorassmr.blogspot.ro/2016/11/tema.html>)



- b) Partea opțională: rezolvarea aplicațiilor practice rămase pe fișă.

- 10) (8') Feedback și "bilet de ieșire"- Elevii primesc câte două file post-it. Pe una sunt invitați să pună întrebări și să facă observații asupra lecției, specificând eventualele lor nelămuriri. Pe a doua, vor răspunde la o întrebare- fulger (la alegerea profesorului, în funcție de evoluția lecției). Prima filă va fi lipită pe tablă, urmând a constitui material de reflecție pentru profesor, iar a doua va fi înmănată profesorului la ieșirea pe ușa sălii de clasă (metoda "exit ticket", pentru feedback imediat).

Lecția: Funcții

Clasa a VIII-a

Autori (în ordine alfabetică):

Prof. Sorin Borodi,

Prof. Alina-Elena Grecu,

Prof. Adina Oancea,

Prof. Ariana-Stanca Văcărețu

Competență vizată: Recunoașterea unor corespondențe care sunt funcții

Obiectivele lecției:

La finalul lecției elevii vor fi capabili să:

- definească funcția
- identifice exemple și contraexemple de dependențe funcționale
- analizeze exemple de dependență funcțională din viața cotidiană sau din alte discipline de studiu (din fizică)
- analizeze exemple de funcții definite prin: diagrame, tabele, formule
- construiască exemple de dependență funcțională din viața cotidiană sau din alte discipline de studiu (din fizică)
- construiască exemple de funcții definite prin: diagrame, tabele, formule

Conținuturi:

- Noțiunea de funcție
- Funcții definite pe mulțimi finite exprimate prin diagrame, tabele formule

Resurse

Website: http://sorinborodi.ro/Functii/Lectie_functii.html (include toate resursele necesare – inclusiv, aplicații geogebra, resurse video, quiz-uri hotpotatoes, fișe de lucru)

Structura lecției

Lecția este structurată pe 4 blocuri:

1. **Blocul 1: Chestiuni pregătitoare** – motivează elevul pentru învățare și îl pregătește pentru introducerea definiției conceptului de funcție
 - definirea genului proxim al conceptului de funcție
 - enunț despre utilitatea studiului funcțiilor
 - 3 exerciții (Culoarea ochilor, Câte pătrate?, Deplasarea mașinii) în care elevul este pus în situația de a lucra cu dependențe funcționale, fără a ști că lucrează cu funcții
2. **Blocul 2: Teorie** – se introduc cunoștințele noi (profesorul se bazează, pe ceea ce elevul știe despre dependențele funcționale)
 - Definiția funcției (domeniul de definiție, domeniul de valori/ codomeniul, legea de corespondență) - text

- Funcții definite pe mulțimi finite exprimate prin diagrame - exercițiu
 - Funcții definite pe mulțimi finite exprimate prin tabele - exercițiu
 - Funcții definite pe mulțimi finite exprimate prin formule - exercițiu
 - Sinteză (definiție, exemple și contraexemple de funcții, funcții definite pe mulțimi finite exprimate prin diagrame, tabele formule) - video
 - 3 exerciții pentru verificarea înțelegerii noțiunilor teoretice referitoare la funcții
3. **Blocul 3: Aplicații** – elevii aplică în exerciții teoria învățată
- 3 exerciții rezolvate – pentru a modela analiza unor dependențe exprimate prin diagramă, tabel, respectiv, formulă.
 - 3 exerciții propuse spre rezolvare - elevii sunt puși în situația de a analiza dependențe, exprimate prin diagramă, tabel și, respectiv, cuvinte pentru a stabili dacă o corespondență este funcție sau nu, de a modifica o corespondență pentru a o transforma într-o funcție, respectiv, de a deduce formula prin care să fie exprimată legea de corespondență a unei funcții.
4. **Blocul 4: Mai mult ...** - elevii aplică în alte contexte teoria învățată și reflectează asupra celor învățate
- Un rezumat al lecției (definiția funcției ilustrată prin „date de intrare – relație - date de ieșire”, exemple de funcții din viața cotidiană și astronomie) și o sarcină de lucru (construirea unui exemplu de funcție) - video
 - Exerciții propuse pentru consolidarea noțiunilor referitoare la funcții - fișă
 - Organizator grafic (model Frayer) – fișa conține doar structura organizatorului grafic și este un instrument util în dezvoltarea vocabularului matematic pentru că sprijină o mai bună (și mai profundă) înțelegere a conceptului de funcție.
 - Fișa de lucru – Triunghiuri și bețe de chibrituri prin care se ghidează rezolvarea de exerciții de completare a unui șir, de identificare a regulii de alcătuire a unui șir, a funcției prin care se poate exprima regula de alcătuire a unui șir. Problemele propuse în cadrul acestei fișe de lucru vin și în sprijinul formării competenței de a identifica corespondențe care sunt funcții și de a le utiliza în rezolvarea de probleme.
 - Exercițiu de analiză a unui exemplu de dependență funcțională din fizică (grade Celsius vs grade Fahrenheit) și de identificare a legii de corespondență care transformă grade Celsius în grade Fahrenheit.

Sugestii pentru profesori

1. Blocurile din structura lecției precum și elementele fiecărui bloc pot fi utilizate în cadrul lecției în ordinea în care sunt, sau într-o altă ordine.

Oferim, mai jos, câteva exemple:

Exemplul 1 (clasic): În cadrul lecției de 50 min se parcurg blocurile 1., 2. și 3. , rămânând ca elementele blocului 4. să fie abordate de elevi acasă (parțial sau complet) sau în ora următoare.

Exemplul 2 („flipped classroom” – clasa răsturnată): În ultima parte a unei lecții se abordează, la clasă, blocul 1., apoi elevii parcurg acasă toate elementele blocului 2. În cadrul lecției propriu-zise (de 50 min) se parcurg blocurile 3. și 4. (blocul 4 . - parțial sau complet) și se discută aspectele teoretice care sunt legate de rezolvarea sarcinilor de lucru din aceste blocuri.

Exemplul 3 („flipped classroom” – clasa răsturnată): Elevii parcurg acasă blocurile 1. și 2., înainte de lecție, iar în cadrul lecției propriu-zise (de 50 min) se parcurg blocurile 3. și 4. (blocul 4. - parțial sau complet) și se discută aspectele teoretice care sunt legate de rezolvarea sarcinilor de lucru din aceste blocuri.

Exemplul 4: În parcurgerea blocului 3., elevii pot fi provocați să rezolve problemele 2, 4 și 6 și apoi să analizeze rezolvările problemelor/ exercițiilor 1, 3 și 5.

2. Blocurile/ elementele blocurilor care nu au fost abordate la clasă ar trebui abordate de elevi acasă.
3. Cele două video-uri care conțin sinteza, respectiv, rezumatul lecției (bloc 2 *Teorie – Sinteza*, respectiv, bloc 4 *Mai mult ... - Pe scurt despre funcții ... și o provocare*) sunt complementare. Video-clip-ul *Sinteza* conține definiția formală a funcției (cu exemple și contraexemple de funcții) în timp de video-clip-ul *Pe scurt despre funcții ... și o provocare* conține o definiție intuitivă a funcției bazată pe date de intrare – relație – date de ieșire (cu exemple). Considerăm că pentru înțelegerea conceptului de funcție de către fiecare elev este important ca acest concept să fie prezentat în mai multe moduri.
4. Existența fișelor de lucru (în cadrul unor elemente din blocul 1., blocul 4.) precum și a aplicațiilor geogebra și hotpotatoes permit organizarea de activități individuale, în perechi sau pe grupe. Recomandăm organizarea de astfel de activități. Activitățile în perechi sau pe grupe ar trebui finalizate printr-o discuție frontală referitoare la rezultatele obținute de elevi și la modul în care elevii au gândit pentru a ajunge la rezultat.
5. Elementele blocurilor 3. și 4. permit realizarea unei evaluări formative, pentru învățare – în special, dacă elevii lucrează individual, în perechi sau pe grupe. De exemplu, analiza organizatorului grafic completat de fiecare elev (sau de perechi/ grupe de elevi) permite profesorului identificarea nivelului de înțelegere a conceptului de funcție precum și, dacă este cazul, identificarea aspectelor care au fost înțelese greșit de elevi.
6. Aplicațiile geogebra și hotpotatoes (exerciții/ probleme pe care elevii le rezolvă online) au avantajul că oferă feedback imediat elevilor. În mod ideal, aceste aplicații ar trebui rezolvate de elevi, individual sau în perechi – dar pentru aceasta, ar trebui să existe în clasă calculatoare/ tablete conectate la internet pentru elevi. Dacă nu există o astfel de dotare, aplicațiile pot fi proiectate de profesor pe pe ecran și elevii le vor rezolva, individual sau în perechi, în caiete.

Evaluare

Există numeroase ocazii pentru evaluare pe parcursul acestei lecții (a se vedea punctele 5 și 6 de mai sus). Evaluarea în cadrul acestei lecții vizează:

- nivelul înțelegerii conținuturilor
- modul de a gândi al elevilor
- nivelul de implicare a elevilor.

Pentru evaluarea nivelului înțelegerii conținuturilor ar trebui avute în vedere:

- calitatea răspunsurilor oferite de elev atât în cadrul discuțiilor, cât și în cadrul activităților din blocul 4.:

- exemplul de funcție construit ca răspuns la provocarea de la activitatea *Pe scurt despre funcții ... și o provocare*,
- justificările/ explicațiile scrise la exercițiile 4., 7., 8. din fișa de lucru *Exerciții propuse pentru consolidarea noțiunilor referitoare la funcții*,
- definiția conceptului de funcție, caracteristicilor esențiale (ale funcției) identificate, exemplele și contraexemplele construite din organizatorul grafic inclus în fișa de lucru *Învăț să te autoevaluezi!*
- relația identificată între numărul de triunghiuri și numărul bețelor de chibrituri, numărul de triunghiuri care pot fi construite utilizând 83 bețe de chibrit, funcția identificată pentru pune în evidență legătura dintre numărul triunghiurilor și numărul bețelor de chibrituri, funcția identificată pentru a evidenția relația dintre numărul căii de acces și numărul de plăci necesare pentru a o realiza - din cadrul fișei de lucru *Chibrituri și triunghiuri*.
- corectitudinea răspunsurilor oferite de elev atât în cadrul discuțiilor cât și în cadrul unor activități din blocurile 2., 3. și 4.:
 - domeniul de definiție identificat în cazul unei funcții date prin diagramă, valoarea variabilei identificată când se cunoaște valoarea funcției în cazul unei funcții date prin tabel, formula identificată pentru a exprima legea de corespondență a unei funcții descrise în cuvinte - în cadrul exercițiilor de la *Teorie - Ai înțeles?*
 - valoarea de adevăr asociată propoziției „funcția este corect definită” (corespondență dată prin diagramă), modificarea realizată pentru a transforma o corespondență (dată prin tabel) care nu e funcție într-o funcție, formula identificată pentru a exprima legea de corespondență a unei funcții descrise prin imagine și cuvinte - în cadrul exercițiilor/ problemelor 2, 4 și 6 de la *Aplicații*.
 - corespondențele identificate ca fiind funcții, valorile funcției pentru valori specificate ale variabilei când legea de corespondență este exprimată printr-o formulă, domeniul de definiție identificat când funcția este definită cu ajutorul unui tabel, formula dedusă pentru exprimarea legii de corespondență a unei funcții date prin tabel, numărul de funcții identificat când se cunosc cardinalul domeniului și al codomeniului – în cadrul exercițiilor de la *Mai mult ... Exerciții propuse pentru consolidarea noțiunilor referitoare la funcții*.
 - formula identificată pentru a exprima grade Celsius în grade Fahrenheit – în cadrul problemei *Temperatura. Celsius vs. Fahrenheit* de la *Mai mult ...*

Vă propunem următoarea listă de verificare pentru evaluarea nivelului înțelegerii conceptului de funcție

Nume elev: Dată:	Da	Nu	Parțial (în această situație, profesorul notează în tabel starea de fapt)
Formulează corect definiția funcției (cu propriile cuvinte)			
Citește corect funcțiile definite prin diagrame			
Citește corect funcțiile definite prin tabele			
Citește corecte funcțiile definite prin formule			
Identifică corect elementele care fac parte din definiția funcției			
Identifică, corect, caracteristicile esențiale ale funcției			

Identifică, corect, domeniul de definiție atunci când funcția este definită prin diagramă			
Identifică, corect, domeniul de definiție atunci când funcția este definită prin tabel			
Identifică, corect, domeniul de definiție atunci când funcția este definită prin formulă			
Identifică, corect, domeniul de valori (codomeniul funcției) atunci când funcția este definită prin diagramă			
Identifică, corect, domeniul de valori (codomeniul funcției) atunci când funcția este definită prin tabel			
Identifică, corect, domeniul de valori (codomeniul funcției) atunci când funcția este definită prin formulă			
Identifică, corect, corespondențele care sunt funcții, atunci când corespondențele sunt exprimate prin diagrame			
Identifică, corect, corespondențele care sunt funcții, atunci când corespondențele sunt exprimate prin tabele			
Identifică, corect, corespondențele care sunt funcții, atunci când corespondențele sunt exprimate prin formule			
Identifică, corect, elementul din codomeniu care este asociat unui element din domeniu atunci când funcțiile sunt exprimate prin diagrame			
Identifică, corect, elementul din codomeniu care este asociat unui element din domeniu atunci când funcțiile sunt exprimate prin tabele			
Identifică, corect, elementul din codomeniu care este asociat unui element din domeniu atunci când funcțiile sunt exprimate prin formule			
Identifică, corect, elementele din domeniu care sunt asociate unui element din codomeniu atunci când funcțiile sunt definite prin diagrame			
Identifică, corect, elementele din domeniu care sunt asociate unui element din codomeniu atunci când funcțiile sunt definite prin tabele			
Identifică, corect, elementul din domeniu care este asociat unui element din codomeniu atunci când funcțiile sunt definite prin formule liniare			
Construiește corect exemple de funcții date prin diagrame			
Construiește corect exemple de funcții date prin tabele			
Construiește corect exemple de funcții date prin formule			
Construiește corect contraexemple de funcții (corespondențe care nu sunt funcții) date prin diagrame			
Construiește corect contraexemple de funcții (corespondențe care nu sunt funcții) date prin tabele			

Construiește corect contraexemple de funcții (corespondențe care nu sunt funcții) date prin formule			
Identifică, corect, legea de corespondență pentru funcții simple din viața cotidiană sau din fizică atunci când situațiile sunt descrise prin cuvinte sau/ și imagini			
Justifică, corect, de ce o corespondență este sau nu o funcție			

Lista de verificare poate fi ușor adaptată (primul verb din fiecare linie a tabelului va fi scris la persoana I singular) pentru a deveni un instrument de autoevaluare pentru elevi.

Pentru evaluarea modului de a gândi al elevilor ar trebui avută în vedere:

- calitatea răspunsurilor oferite de elev atât în cadrul discuțiilor, cât și în cadrul activităților din blocul 4.:
 - exemplul de funcție construit ca răspuns la provocarea de la activitatea *Pe scurt despre funcții ... și o provocare*,
 - justificările/ explicațiile scrise la exercițiile 4., 7., 8. din fișa de lucru *Exerciții propuse pentru consolidarea noțiunilor referitoare la funcții*,
 - definiția conceptului de funcție, caracteristicilor esențiale (ale funcției) identificate, exemplele și contraexemple construite din organizatorul grafic inclus în fișa de lucru *Învață să te autoevaluezi!*
 - descrierile modului de lucru/ de gândire și reflecția din cadrul fișei de lucru *Chibrituri și triumfiuri*.

Pentru evaluarea nivelului de implicare a elevilor ar trebui avută în vedere:

- implicarea elevului în activitățile individuale/ în perechi/ în grup, activități monitorizate de profesor pe parcursul derulării lor; în acest sens este util ca profesorul să creeze o fișă de monitorizare/ observare a activității elevului. Fișa ar trebui să conțină toate sarcinile de lucru pe care elevul le primește în clasă și pentru acasă (indiferent dacă trebuie să le rezolve individual, în perechi sau în grup)

Vă propunem următoarea structură a fișei de observare a activității elevului:

Nume elev: Data:

Sarcina	Mod de organizare a clasei pentru rezolvarea sarcinii (individual, perechi, grup)	Implicare comportamentală (se notează +/0/-/n)	Implicare emoțională (se notează +/0/-/n)	Implicare cognitivă (se notează +/0/-/n)
Citește informația referitoare la genul proxim al funcției				
Rezolvă exercițiul <i>Culoarea ochilor</i>				
...				

În ultimele 3 coloane, profesorul notează:

- + dacă a observat o implicare pozitivă
- 0 dacă a observat lipsa implicării
- – dacă a observat o implicare negativă
- n dacă nu a putut observa/ nu a avut ocazia să observe.

În tabelul de mai jos oferim câteva exemple de implicare pozitivă și negativă

	Implicare pozitivă	Lipsă de implicare	Implicare negativă
Implicare comportamentală	Ascultă activ ceea ce prezintă profesorul și colegii în clasă, ascultă activ când vorbesc colegii în activitățile de grup/ în pereche, participă cu entuziasm	Privește în gol (pare să se gândească în altă parte) în timp ce ceilalți (profesorul sau colegii) prezintă/ discută, nu participă la discuții	Deranjează sau boicotează, activitatea clasei/ grupului/ perechii
Implicare emoțională	Interes	Plictiseală, apatie	Respingere
Implicare cognitivă	Rezolvă toate sarcinile de lucru obligatorii și suplimentare (nu neapărat corect) conform cerințelor	Sarcini de lucru rezolvate cu întârziere, în grabă sau nerezolvate	Redefinește cerințele sarcinilor de lucru (rezolvă ce și cum vrea el/ea, neținând cont de cerințe)

(adaptare după Fredricks, J.A., Blumenfeld, P.C. and Paris, A.H. (2004) School Engagement: Potential of the Concept, State of the Evidence. Review of Educational Research. 74 (1), pp. 62-63).

Dacă clasa este numeroasă, este foarte greu ca profesorul să observe activitatea fiecărui elev. De aceea, recomandăm ca înainte de începerea lecției profesorul să selecteze elevii a căror activitate va fi monitorizată și a căror învățare va fi evaluată.

Funcții

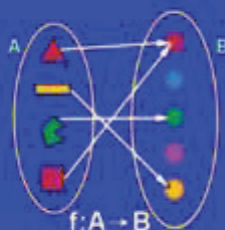
- Noțiunea de funcție
- Funcții definite pe mulțimi finite exprimate prin diagrame, tabele, formule

**Chestiuni
pregătitoare**

Teorie

Aplicații

Mai mult...



Înapoi

Chestiuni pregătitoare

Funcția este o noțiune importantă din matematică.

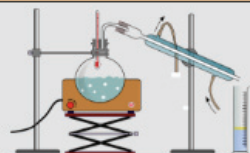
Oare ce sunt funcțiile ? Numere, operații, ecuații, figuri ?

Vom afla în această lecție.

Click!



Funcțiile sunt utile în studierea fenomenelor fizice, chimice și altele.



[Fișa pdf](#)

Pentru a înțelege noțiunea de funcție vom aborda mai întâi niște chestiuni introductive. Poți face asta dând click pe butoanele alăturate:



Culoarea
ochilor



Câte pătrate?



Deplasarea
mașinii

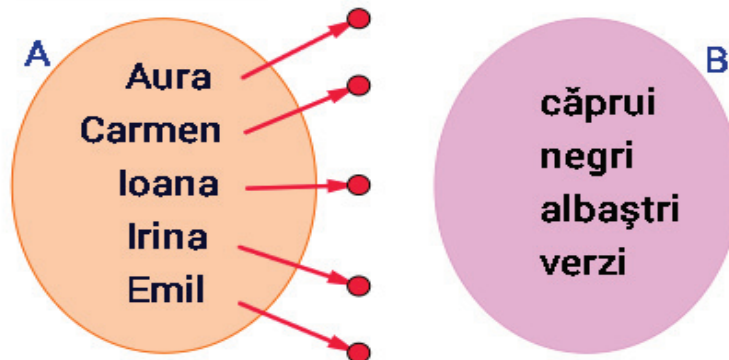
Functii - culoarea ochilor

Ioana spune:

-Aura, ai observat că noi două avem aceeași culoare a ochilor, albaștri ?

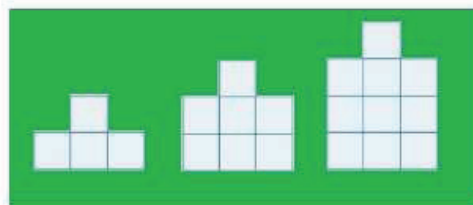
-Da. Interesant este că sora mea, Irina, are ochi căprui.

-Și fratele meu, Emil, la fel, spre deosebire de verișoara mea, Carmen, care are ochi verzi.

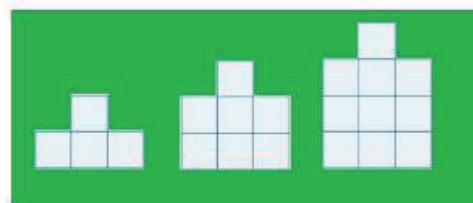


Realizați asocieri corecte care să indice culorile ochilor celor 5 copii.

Câte pătrate ?



1/3 Analizați figurile din imagine. Imaginați-vă din câte pătrate ar fi compusă figura următoare. Câte pătrate ar avea a 100-a figură?



2/3 Analizați figurile din imagine. Câte pătrate ar avea a n-a figură?

$3n+1$

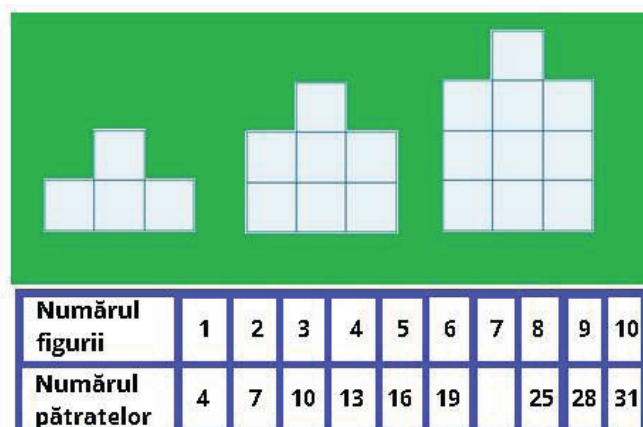
n

$3n$

$3n+3$

$n+3$

$4n+1$



- 3 / 3 În tabel se observă că fiecărui număr de pe prima linie îi corespunde un număr pe a doua linie. Ce număr trebuie pus în căsuța goală a tabelului?

Functii-deplasarea masinii

0.5

Timp (ore)

30 km

O mașină se deplasează pe șosea cu viteză constantă (nu accelerează și nu frânează) de 60 km/h (adică într-o oră parcurge 60 km).
Completați următorul tabel:

Timp (ore)	$\frac{1}{2}$	1	$2\frac{1}{2}$	3
Distanță (km)	30	60	0	180

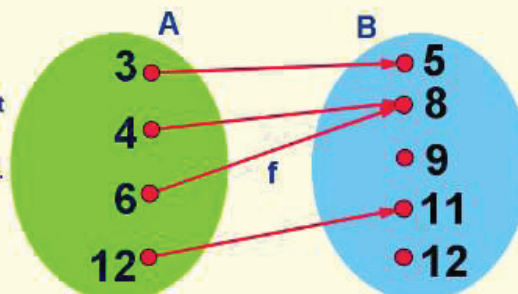
Înapoi

Teorie

Spunem că am definit o funcție pe mulțimea A cu valori în mulțimea B dacă facem ca **fiecărui** element din A să-i corespundă **un singur** element din B.

Notând funcția, de exemplu f, putem scrie $f:A \rightarrow B$. (citim "funcția f definită pe A cu valori în B").

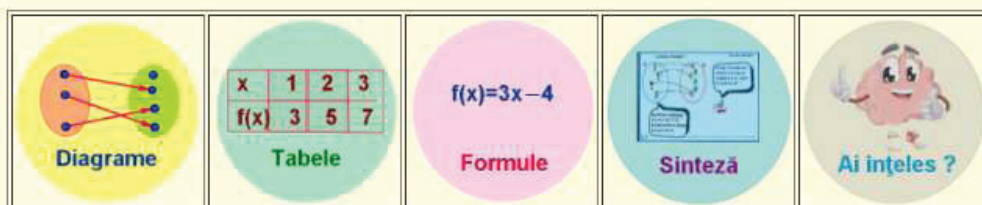
A se numește **domeniul de definiție**, iar B **domeniul de valori al funcției** (sau codomeniu).



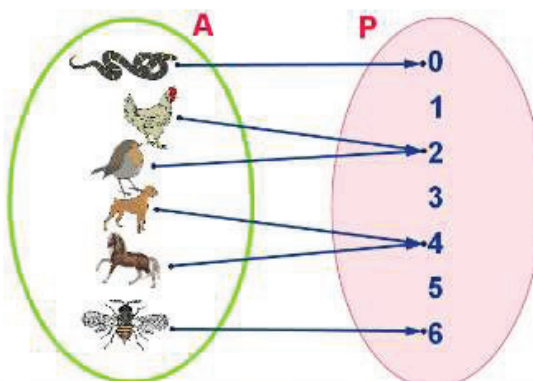
Pentru funcția f definită în imaginea alăturată, putem scrie: $f(3)=5$, $f(4)=8$, $f(6)=8$, $f(12)=11$.

Funcțiile se pot defini prin mai multe procedee:

prin **diagrame**, prin **tabele** sau cu ajutorul unei **formule** (lege de corespondență).



Diagrame



Cel mai simplu mod de a defini o funcție este de a reprezenta mulțimile prin diagrame și indicarea (de obicei prin săgeți) asocierilor date de funcție.

De exemplu, funcția $f:A \rightarrow P$ de mai sus indică pentru unele animale numărul de picioare.

Cu cât este egal $f(\text{dog}) + f(\text{chicken})$?

3 0 2 7 6 4

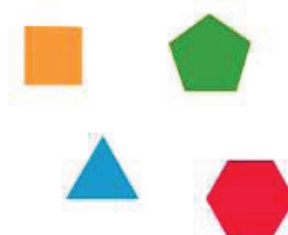
Tabele

Un alt mod de a defini o funcție este de a reprezenta elementele celor două mulțimi printr-un tabel, asocierea fiind dată de vecinătatea căsuțelor tabelului.

De exemplu, funcția $d:\{3,4,5,6\}\rightarrow\{0,2,5,9\}$ de mai jos indică pentru unele poligoane numărul de diagonale.

Dacă $d(n)=2$, cu cât este egal n ?

Număr laturi	n	3	4	5	6
Număr diagonale	$d(n)$	0	2	5	9



Formule

De multe ori, este convenabil să definim funcțiile cu ajutorul unei formule (sau lege de corespondență), care indică prin calcul modul de asociere.

De exemplu, având $f:\{1; 1,5; 2; 3; 7\}\rightarrow\mathbb{R}$, formula $f(x)=2x$ arată că unui număr oarecare x îi va corespunde, prin funcția f , dublul său.

Vom avea: $f(1)=2$, $f(1,5)=3$, $f(2)=4$ etc.

Cu cât este egal $f(7)$?

? | 12

? | 7

? | 2

? | 27

? | 14

? | 9

Sinteză

Functii. Definitie. Elemente

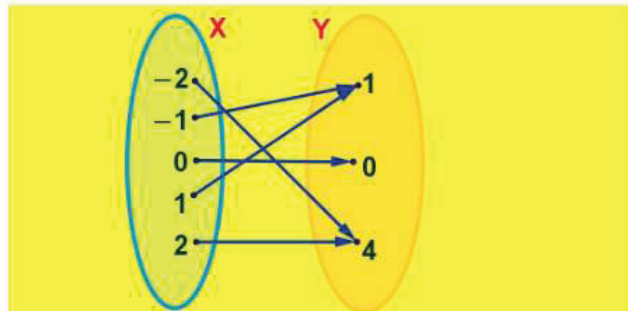
Ce este o funcție?

<http://sorinborc.ro>

Am făcut ca fiecare element din A să-i corespundă un singur element din B.

Arcași, vă ordon să definiți o funcție pe mulțimea A cu valori în mulțimea B!

Ai înțeles?



1 / 3 Funcția $g: X \rightarrow Y$ definită în diagramele de mai sus asociază fiecărui număr din X pătratul său în Y .
Care este domeniul de definiție al funcției g ?

{4}

{-2;-1;0;1;2}

{0;1;2}

{0;1;4}

$\mathbb{N}$

2 / 3

O sticlă de suc costă 2 lei, iar sacoșa pentru transport costă 1 leu. Funcția p definită în tabelul de mai jos arată prețul total al cumpărăturilor:

Număr sticle	n	1	2	3	4
Preț total	$p(n)$	3	5	7	9



Dacă $p(a)=3$, cu cât este egal a ?

3 / 3

Într-un tub sunt 60 de pastile. În fiecare zi Mioara ia trei pastile.

Formula funcției care indică numărul pastilelor rămase în tub, în funcție de numărul de zile, este $f(x)=\dots$



$3x-60$

$3x+60$

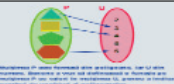
$3x$

$60-3x$

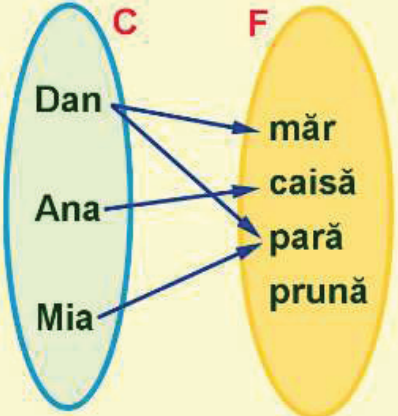
$60-x$

Înapoi

Aplicații

1. Urmărește această problemă rezolvată:	 Modelul din imagine reprezintă o funcție f de la mulțimea C la mulțimea F. Funcția f este definită prin: $f: C \rightarrow F$ unde: $C = \{\text{Dan}, \text{Ana}, \text{Mia}\}$ $F = \{\text{măr}, \text{caisă}, \text{prună}\}$ $f(\text{Dan}) = \text{măr}$ $f(\text{Ana}) = \text{caisă}$ $f(\text{Mia}) = \text{prună}$												
2. Folosind modelul de mai sus, rezolvă problema următoare:	 Modelul din imagine reprezintă o funcție f de la mulțimea C la mulțimea F. Funcția f este definită prin: $f: C \rightarrow F$ unde: $C = \{\text{Dan}, \text{Ana}, \text{Mia}\}$ $F = \{\text{măr}, \text{caisă}, \text{prună}\}$ $f(\text{Dan}) = \text{măr}$ $f(\text{Ana}) = \text{caisă}$ $f(\text{Mia}) = \text{prună}$												
3. Din această problemă vei înțelege mai bine condițiile ca o funcție să fie corect definită:	Funcția $f: \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \right\} \rightarrow \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \right\}$ este definită ca $f(x) = \text{cel mai mic divizor comun al } x \text{ și } 6$. Dați o funcție corect definită $f: \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \right\} \rightarrow \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \right\}$ și precizați valoarea $f\left(\frac{1}{2}\right)$. <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td>$\frac{1}{3}$</td> <td>$\frac{1}{4}$</td> <td>$\frac{1}{5}$</td> <td>$\frac{1}{6}$</td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td>1</td> <td>6</td> <td>2</td> <td>5</td> <td>3</td> </tr> </table>	x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	f(x)	1	6	2	5	3
x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$								
f(x)	1	6	2	5	3								
4. Stabilește dacă funcția este corect definită:	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>2</td> <td>8</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td>5</td> <td>8</td> <td>4</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> </table>	x	2	8	3	2	5	f(x)	5	8	4	0	1
x	2	8	3	2	5								
f(x)	5	8	4	0	1								
5. Din videoclipul alăturat vei afla cu câte mere a rămas Prințul Appleking:													
6. Încearcă să deduci formula funcției pentru calcularea lungimii gardului:	 Modelul din imagine reprezintă o funcție f de la mulțimea C la mulțimea F. Funcția f este definită prin: $f: C \rightarrow F$ unde: $C = \{\text{Dan}, \text{Ana}, \text{Mia}\}$ $F = \{\text{măr}, \text{caisă}, \text{prună}\}$ $f(\text{Dan}) = \text{măr}$ $f(\text{Ana}) = \text{caisă}$ $f(\text{Mia}) = \text{prună}$												

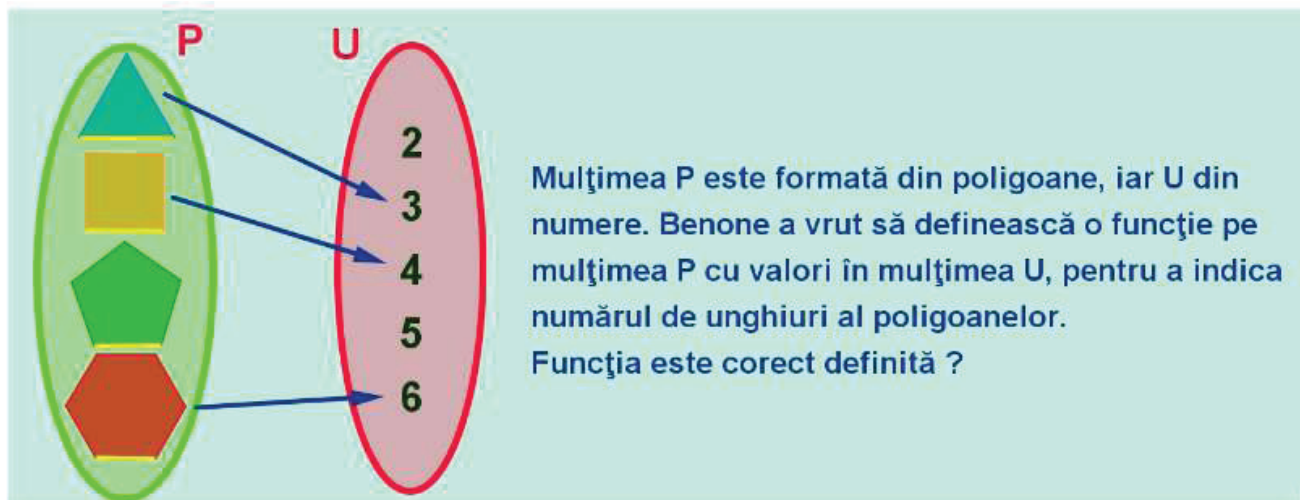
Aplicația 1



Mulțimea C este formată din copii, iar F din fructe. Tudorel a vrut să definească o funcție pe mulțimea C cu valori în mulțimea F, pentru a indica preferințele copiilor. Funcția este corect definită ?

Nu, deoarece elementului „Dan” din C nu-i corespunde un **singur** element din F (îi corespund două elemente din F: „măr” și „pară”).

Aplicația 2



Nu, deoarece pentagonului din P nu-i corespunde niciun element din U.

Aplicația 3

Funcția $f: \left\{ 2; \frac{4}{9}; -3; \sqrt{5}; -\frac{1}{8} \right\} \rightarrow \mathbb{N}$ este definită cu ajutorul tabelului de mai jos.

Care din elementele mulțimii $M = \left\{ -1; \frac{3}{7}; 6; \sqrt{2}; -\frac{2}{3}; 3, 2 \right\}$ ar putea fi pus în căsuța goală a tabelului?

x	2	$\frac{4}{9}$	-3	$\sqrt{5}$	$-\frac{1}{8}$
f(x)	5	0	3		4

Domeniul de valori al funcției (codomeniul) fiind $\mathbb{N}$, în căsuța goală poate fi pus singurul număr natural din M, adică 6.

Aplicația 4

Funcție corect definită

Schimbați între ele două numere, astfel încât funcția f să fie corect definită.

x	2	8	3	2	5
f(x)	5	8	4	0	1

Aplicația 5



Deducerea formulei unei funcții

<http://sorinborodi.ro>

Prințul Appleking a cules 62 de mere de aur din grădina dragonului. Dar, pe drumul de întoarcere, s-a întâlnit, succesiv, cu 5 paznici, să-i numim Unu, Doi, Trei, Patru, Cinci. Fiecare din aceștia i-a zis:

– Dă-mi jumătate din câte mere ai la tine, plus un măr.

Deduceți o formulă pentru funcția care exprimă numărul de mere cu care rămâne prințul după ce trece de paznicul cu numărul n .

Rezolvare

Vom întocmi un tabel:

Paznicul	Câte mere are	Câte îi dă paznicului	Câte mere rămân
1	62	32	30
2	30	16	14
3	14	8	6
4	6	4	2
5	2	2	0

Observăm că numerele ce arată merele rămase, (30, 14, 6, 2, 0) sunt puteri ale lui 2, din care se scade 2:

$$\begin{aligned} 30 &= 32 - 2 = 2^5 - 2 \\ 14 &= 16 - 2 = 2^4 - 2 \\ 6 &= 8 - 2 = 2^3 - 2 \\ 2 &= 4 - 2 = 2^2 - 2 \\ 0 &= 2 - 2 = 2^1 - 2 \end{aligned}$$

Din nefericire, după ce a trecut de ultimul paznic, prințului Appleking nu i-a mai rămas niciun măr...

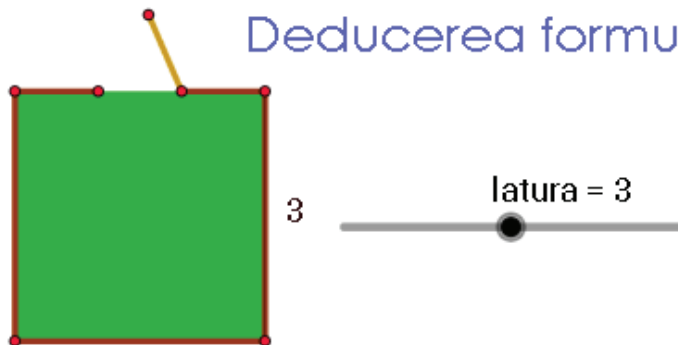


Avem astfel funcția $f : \{1; 2; 3; 4; 5\} \rightarrow \{30; 14; 6; 2; 0\}$.

Formula funcției care exprimă numărul de mere cu care rămâne prințul după ce trece de paznicul cu numărul n este $f(n) = 2^{6-n} - 2$

Aplicația 6

Deducerea formulei unei funcții



O grădină are forma unui pătrat. O poartă de acces are lățimea 1 m.

Deduceți o formulă pentru funcția care exprimă lungimea gardului necesar pentru împrejmuirea grădinii, dacă latura pătratului este x .

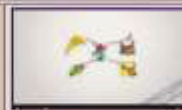
$$f(x) =$$

$$\begin{matrix} & x & \\ +1 & & -1 \\ & (x-1) & 4 \end{matrix}$$

Înapoi

Mai mult...

1. Pe scurt despre funcții... și o provocare



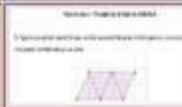
2. Exerciții propuse pentru consolidarea noțiunilor referitoare la funcții:



3. Învăț să te autoevaluezi !



4. Chibrituri și triunghiuri



5. Temperatura. Celsius vs. Fahrenheit

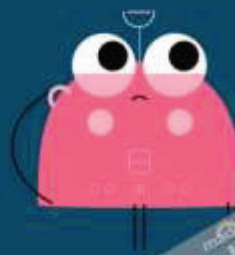


Biteable

THE WORLD'S SIMPLEST VIDEO MAKER

CREATE YOUR OWN

PE SCURT DESPRE FUNCȚII ȘI... O
PROVOCARE



made with
biteable.com

00:01 00:06

FUNCȚII

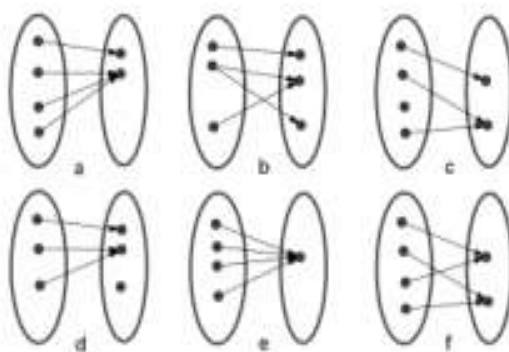
EMBED

SHARE

2. Exerciții propuse pentru consolidarea noțiunilor referitoare la funcții

Funcții. Definiție, elemente. Exerciții

1. Care din diagramele de mai jos reprezintă funcții?



2. Se consideră funcția $f: \{1;2;3\} \rightarrow \{0;1;2\}$, cu formula $f(x)=x-1$, calculați $f(1)+f(3)$

3. Funcția g este definită cu ajutorul tabelului de mai jos:

x	-1	0	1	2
$g(x)$	4	6	8	10

Care este domeniul de definiție al funcției g ?

4. Este corect definită funcția de mai jos? Justificați răspunsul.

x	2	$\sqrt{3}$	2	1,4
$f(x)$	-3	6	3,5	2

5. Se consideră funcția $f: \{0;1;2;3;4\} \rightarrow \mathbb{N}$, cu formula $f(x)=x+3$. Aflați n , dacă $f(n)=5$.

6. Deduceți o formulă pentru funcția f definită în tabelul de mai jos:

x	4	5	6	7
$g(x)$	7	9	11	13

7. Explicați de ce este greșit definită funcția $f: \{-3;-1;0;2;3;4\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{6}{x}$.

8. Este corect definită funcția $f: \{-4;-3;0;3;4\} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = \frac{x}{2} + 1$? Justificați răspunsul.

9. Mulțimea A are 3 elemente, iar B are 2 elemente. Câte funcții care au domeniul de definiție A și codomeniul B pot fi definite ?

3. Învață să te autoevaluezi!

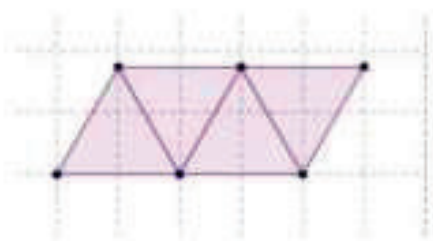
Ce este o funcție? (scrie definiția funcției, fără a o copia din caiet/ manual)	Care sunt caracteristici esențiale ale funcției? (scrie care sunt aspectele esențiale ale unei funcții)
Exemple: (scrie 2-3 exemple de funcții)	Contraexemple : (scrie 2 contraexemple de funcții)

Funcția

4. Chibrituri și triunghiuri

Fișa de lucru – Triunghiuri și bețe de chibrituri

În figură este arătat modul în care au fost așezate 9 bețe de chibrit pentru a construi 4 triunghiuri echilaterale pe un rând,



Care este numărul de triunghiuri echilaterale ce pot fi construite, pe un rând, cu 83 bețe de chibrit?

Pentru a răspunde, urmați etapele sugerate în continuare.

- Priviți cu atenție figura și completați tabelul de mai jos:

Număr triunghiuri echilaterale (t)	1	2	3	4
Număr bețe de chibrit (b)	3			

- Notăm cu t numărul triunghiurilor și cu b numărul bețelor de chibrit. Scrieți o relație care să evidențieze legătura dintre numărul de triunghiuri și numărul bețelor de chibrit.
.....
- Verificați dacă relația pe care ați scris-o este adevărată atunci când înlocuiți, pe rând, datele de pe fiecare coloană din tabel.
- Adăugați/ desenați la cele 4 triunghiuri din figură încă un triunghi, numărați câte bețe de chibrit au fost necesare pentru a construi 5 triunghiuri pe un rând și verificați dacă relația pe care ați scris-o este adevărată și pentru situația în care sunt 5 triunghiuri pe un rând.

- Dacă relația nu este adevărată și pentru situația în care sunt 5 triunghiuri pe un rând, căutați o altă relație care să evedențieze legătura dintre numărul de triunghiuri și numărul bețelor de chibrit parcurgeți încă o dată cele 2 etape anterioare.
- Dacă relația este adevărată și pentru situația în care sunt 5 triunghiuri pe un rând, înlocuiți în relația pe care ați scris-o numărul de bețe de chibrit cu 83 și determinați numărul triunghiurilor.
- Cum ați determinat câte triunghiuri echilaterale pe un rând pot fi construite utilizând 83 bețe de chibrit?

- Dacă relația este adevărată și pentru situația în care sunt 5 triunghiuri pe un rând, înlocuiți în relația pe care ați scris-o numărul de bețe de chibrit cu 83 și determinați numărul triunghiurilor.

- Cum ați determinat câte triunghiuri echilaterale pe un rând pot fi construite utilizând 83 bete de chibrit?

Abstract

- Scrieți calculele care le-ați efectuat pentru a răspunde la întrebarea Care este numărul de triunghiuri echilaterale ce pot fi construite, pe un rând, cu 83 bete de chibrit?

[illegible]

- Definiți o funcție care să pună în evidență legătura dintre numărul triunghiurilor și numărul bețelor de chibrituri. Scrieți mai jos funcția și cum ați procedat pentru a o defini.

A blank grid of graph paper consisting of 20 columns and 10 rows of squares. The grid is used for drawing or plotting.

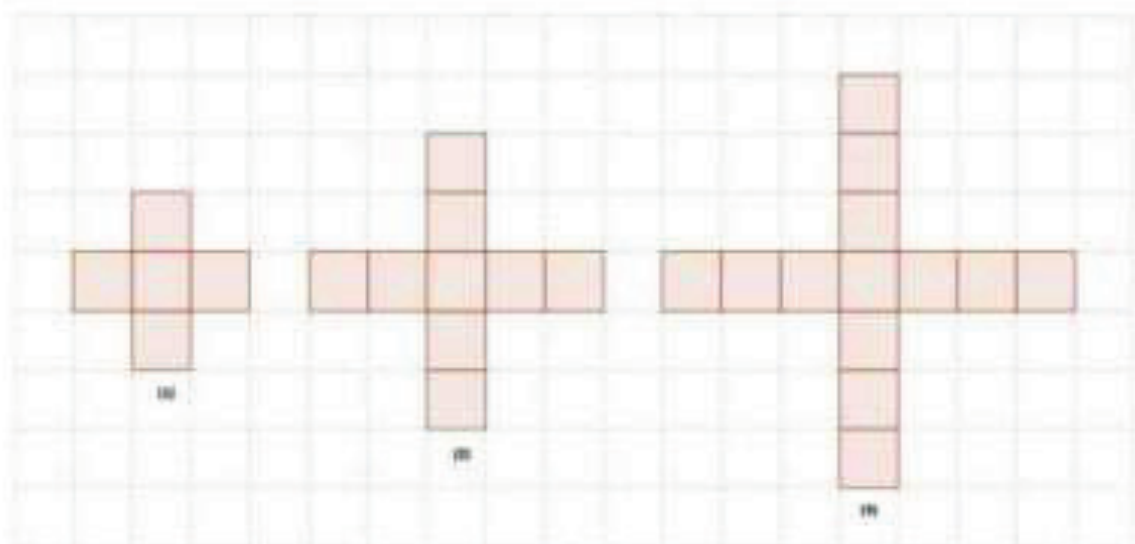
- Gândiți o altă modalitate de a afla răspunsul la întrebarea *Care este numărul de triunghiuri echilaterale ce pot fi construite, pe un rând, cu 83 bețe de chibrit?*

Descrieți această modalitate și scrieți calculele aferente.

- Ce ați învățat rezolvând această problemă?

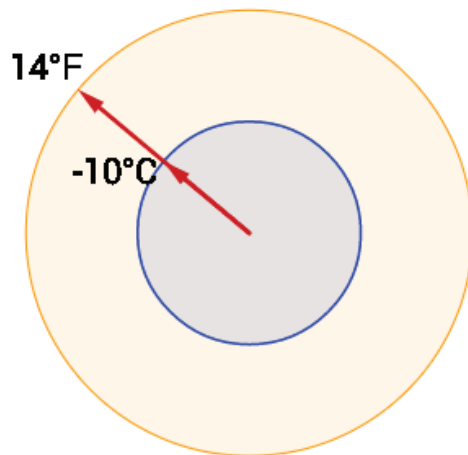
.... Și mai mult!

În figura de mai jos sunt reprezentate 3 căi de acces, în cruce, realizate din plăci pătratice. Identificați o funcție care evidențiază relația dintre numărul căii de acces și numărul de plăci necesare pentru a o realiza.



5. Temperatura. Celsius vs. Fahrenheit

°C - grade Celsius °F - grade Fahrenheit



Având dată o temperatură F exprimată în °F, pentru a o transforma în °C, se folosește formula:

$$\frac{F - 32}{1,8}$$

Așadar, temperatura exprimată în °C este o funcție f cu formula:

$$f(F) = \frac{F - 32}{1,8}$$

De exemplu, $f(77)=25$

[Click pentru vizualizare](#)

Având dată o temperatură C exprimată în °C, ce formulă are funcția g care exprimă acea temperatură în °F ?

$$g(C) = \dots$$

? | $32 - 1,8 \cdot C$

? | $32 - C$

? | $32 \cdot C + 1,8$

? | $1,8 \cdot C + 32$

? | $1,8 \cdot C - 32$

*PROGRAM: CURRICULUMUL ROMÂNESC LA
MATEMATICĂ - REFLECȚII ȘI DIRECȚII VIITOARE*

SSMR-RAF, FEBRUARIE 2016 – FEBRUARIE 2017

Activitate:

Realizarea unui proiect didactic cu tema:

Funcții derivabile. Derivata unei funcții într-un punct. Originea noțiunii de derivată.

PROIECT DIDACTIC

DISCIPLINA: Matematică/Analiză matematică

AUTORI: prof. Agenna IONESCU-MAZILU, prof. Virgilius TEODORESCU, prof. Daniela SÎRGHIE

CLASA: a XI-a (matematică –informatică, nivel mediu)

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE: Derivabilitate

TEMA LECȚIEI: Derivata unei funcții într-un punct. Originea noțiunii de derivată.

TIPUL LECȚIEI: Predare –învățare

OBIECTIVE OPERAȚIONALE:

- elevii să exemplifice situații practice, din viața cotidiană în care este necesară noțiunea de derivată;
- elevii să calculeze derivata unei funcții într-un punct;

COMPETENȚA SPECIFICĂ VIZATĂ:

- aplicarea unor algoritmi specifici calcului diferențial în rezolvarea unor probleme și modelarea unor procese.

METODE DE LUCRU : problematizarea, conversația euristică, investigarea, expunerea, activitatea pe grupe.

RESURSE MATERIALE : laborator de informatică dotat cu videoproiector și tablă interactivă, laptop, internet, ecran de proiecție, fișe de lucru.

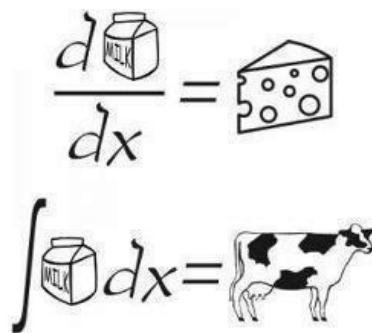
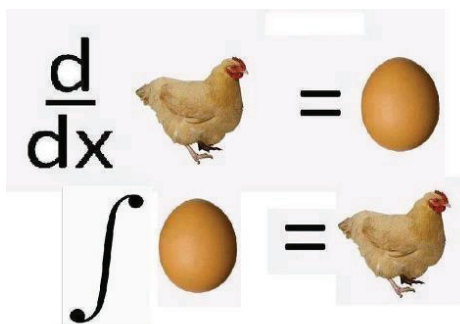
TEHNICI/INSTRUMENTE DE EVALUARE : evaluarea continuă, proiectul, fișa de evaluare.

MOMENTELE LECȚIEI

I. Captarea atenției:

Prezentăm câteva sugestii de resurse pe care profesorul le poate folosi în momentul de "spargere a gheții":

- Din categoria "O imagine face cât o mie de cuvinte".
Orice poveste începe cu "A fost odată"



- Se poate începe ora într-o tonalitate muzicală:
[Calculus Rapsody](#) sau [I will derive!](#)
- Poate fi prezentat site-ul KhanAcademy și un scurt filmuleț despre derivată:
[KhanAcademy.org](https://www.khanacademy.org)

II. Motivarea prezentării temei:

Profesorul proiectează un PowerPoint ale cărei slide-uri sunt prezentate mai jos.



Pe baza acestei prezentări elevii sunt stimulați să își exprime punctul de vedere. Se realizează un dialog frontal cu clasa. Ideile elevilor sunt organizate și completate de profesor.

Ce părere aveți?

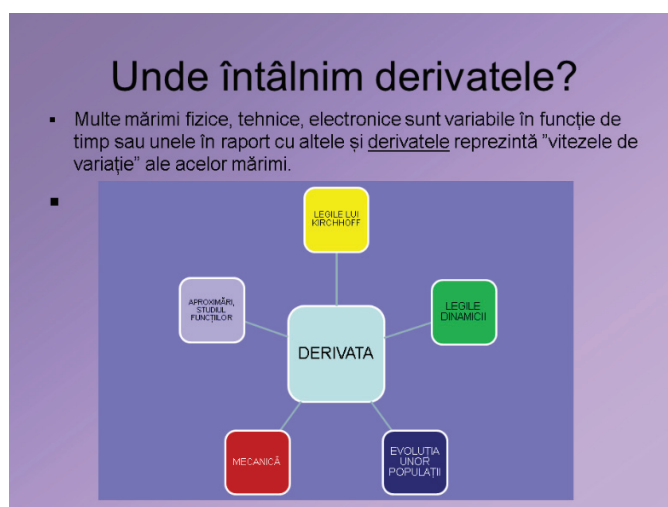
- Care considerați că este cea mai mare realizare a omenirii în domeniul tehnicii? Transmisia TV? Electricitatea? Zborurile cosmice? Internetul? Mașinile?



Derivata-i cea mai tare! 😊

- Considerați că toate aceste lucruri au apărut datorită dezvoltării tehnologiei.
- Aceste realizări ale omenirii s-au bazat pe teoria ANALIZEI MATEMATICE!
- Analiza matematică a făcut posibilă și:
 - Construirea de poduri uriașe;
 - Călătoria pe Lună;
 - Predicția evoluției demografice.

Se prezintă elevilor cu ajutorul unui organizator grafic, cu hyperlink-uri, o serie de aplicații ale derivatei în diferite domenii.



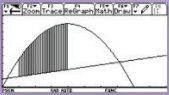
Algebra vs. Analiza matematică

FĂRĂ ANALIZĂ MATEMATICĂ



▪ Aria dreptunghiului

CU ANALIZĂ MATEMATICĂ



▪ Aria suprafeței cuprinse între două curbe

Algebra vs. Analiza matematică

FĂRĂ ANALIZĂ MATEMATICĂ



▪ Calculează viteza medie pentru $t = a$ și $t = b$

CU ANALIZĂ MATEMATICĂ



▪ Calculează viteza instantanee la momentul $t = c$

Elevilor li se vor indica câteva link-uri pe care le pot accesa pentru a descoperi și alte aplicații ale derivatei în practică.

Profesorul poate anticipa tema pentru acasă care va fi sub forma unui proiect de echipă, în care elevii vor trebui să prezinte o aplicație a derivatei într-un domeniu concret.

- [Aplicatii in biologie](#)
- [Aplicatii in electricitate](#)
- [Aplicatii in chimie](#)

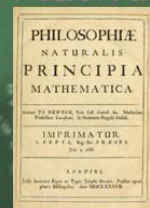
III. Câteva noțiuni de istorie matematică

Sunt prezentate elevilor, concis, câteva idei principale din istoria matematicii despre apariția noțiunii de derivată. Acest lucru poate fi realizat pe baza unor imagini sau a unei scurte prezentări multimedia. Nu se va insista pe partea teoretică. Prezentarea se dorește a fi doar un "preview" al noțiunii.

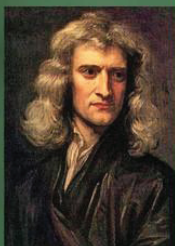


Contextul istoric

- La jumătatea sec. al 17-lea, se adunaseră o serie de rezultate care constituiau în fapt ideile de bază ale calculului diferențial și integral.
- Lipseau ideile "unitare", capabile să înlocuiască ingeniozitatea geometrică și artificiile algebrice cu metode generale și sistematice de rezolvare a problemelor.



Sir Isaac Newton



Noțiunea de derivată a fost introdusă și folosită în matematică de savantul Isaac Newton (1642 - 1724) în legătură cu studiul mecanicii.

Apariția noțiunii de derivată este legată de rezolvarea unei probleme practice legată studiul vitezei și accelerației unui mobil.



Problema vitezei instantanee a unui mobil

viteza medie a mobilului în intervalul de timp $[t_0, t]$ este:

$$v_m = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

viteza instantanee a mobilului în momentul t_0 (fixat), $t_0 > 0$ este:

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

acelerația mobilului la momentul t_0 fixat este:

$$a(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

Gottfried Leibniz

Leibniz



Independent de Newton, Gottfried Leibniz studiază existența și modul de construire a unei tangente la o curbă într-un punct al domeniului de definiție.

Newton și Leibniz sunt considerați "părinții" calculului diferențial și integral.

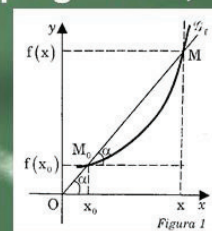


Problema tangentei la o curbă

Fie $f:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție continuă și $M_0(x_0; f(x_0))$ pe graficul, G_f al lui f .

Panta sau **coeficientul unghiular** al tangentei în punctul M_0 la curba G_f este:

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Tangenta în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ este dată de ecuația:

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

Se notează: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

și se numește **derivata funcției f în punctul x_0** .

IV. Introducerea noțiunii de derivată a unei funcții într-un punct

- Se prezintă elevilor activitatea următoare sub forma unei provocări - "Drive test. Cum ne ajută matematica să ne alegem mașina?" Pe ecranul de proiecție vor apărea două mașini (Wolkswagen Golf și Peugeot 307) și câteva specificații tehnice ale acestora.
- După câteva momente de reflecție elevii vor fi împărțiți în două grupe: cei care ar alege Golf-ul și cei care ar alege Peugeot-ul.
- Se împart fișele de lucru care vor apărea proiectate și pe tabla interactivă/ecranul de proiecție.
- Profesorul va deschide în browser-ul de lucru aplicația <https://www.desmos.com/> sau Matlab, GeoGebra pe care o va prezenta elevilor. Cu ajutorul acestora elevii vor trasa grafice de funcții, tangenta într-un punct la grafic, graficul funcției derivate, etc.
- După completarea fișei de lucru, elevii din fiecare grupă vor trage concluzii legate de performanța mașinii pe care au ales-o inițial. Justificarea alegerii se va face prin raportare la viteza instantanee.
- Profesorul va coordona activitatea elevilor orientând-o spre descoperirea dirijată a noțiunilor noi. Se vor introduce riguros definițiile și notațiile aferente.
- Dacă este posibil, ar fi indicat ca graficele plotate pe calculator să fie realizate și de către elevi, eventual pe tabletă sau telefon.

FIȘA DE LUCRU (20-25 min)

➤ PROBLEMĂ

După caracteristicile următoare, ce mașină ați alege să vă cumpărați?

		
	Golf V 1,9 TDI	Peugeot 307 1,6 16V
Preț de plecare	19 510 Euro	18 650 Euro
Tipul motorului	4 cilindri	4 cilindri
Cuplu de tracțiune	255 N.m	150 N.m
Viteza maximă	189 km/h	183 km/h
Accelerație	2,42 m/s ²	2,53 m/s ²
Greutate	1380 kg	1264 kg
Capacitate cilindrică	1896 cm ³	1587 cm ³

➤ EXPLOATAREA DATELOR

Știind că viteza v în funcție de timp este dată de relația :

$$v = at$$

- ❖ v este exprimată în m/s
- ❖ a este exprimată în m/s²
- ❖ t este exprimat în s

1) Tabel de valori :

Calculați vitezele atinse la momentele t din tabelul următor. Aproximați la o sutime rezultatele :

➤ Pentru Peugeot 307 : $a = 2,53\text{m/s}^2$

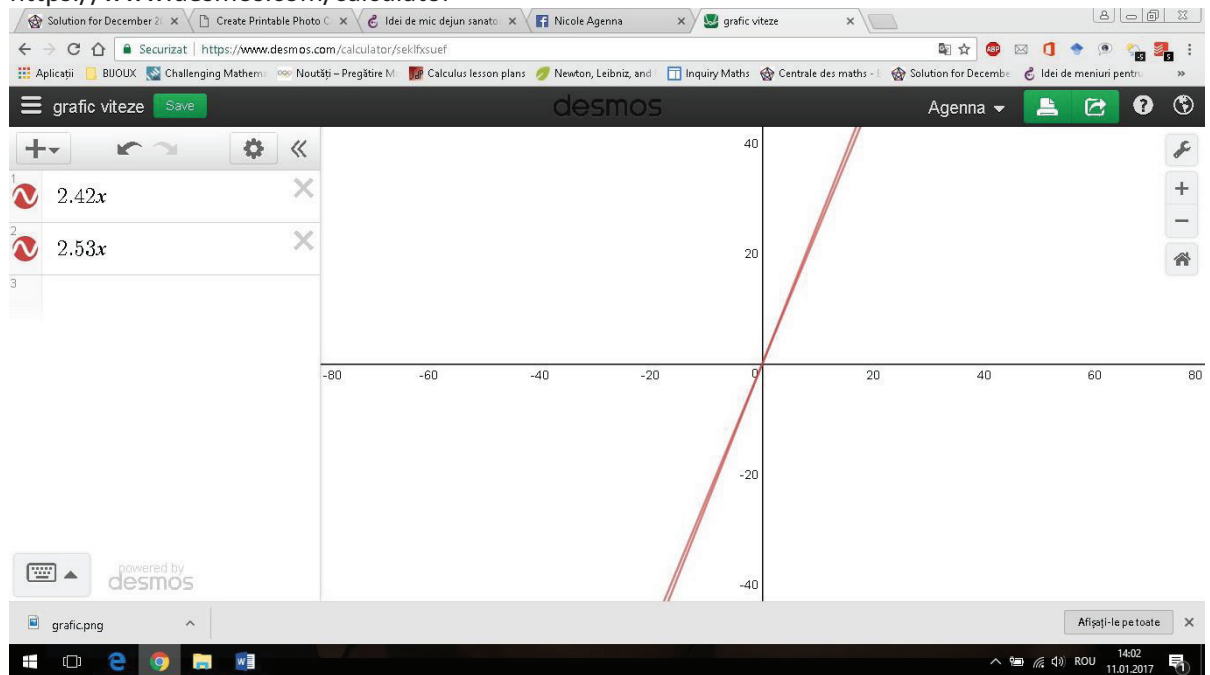
t (s)	0	4	10	16	20	24	28
v (m/s)							

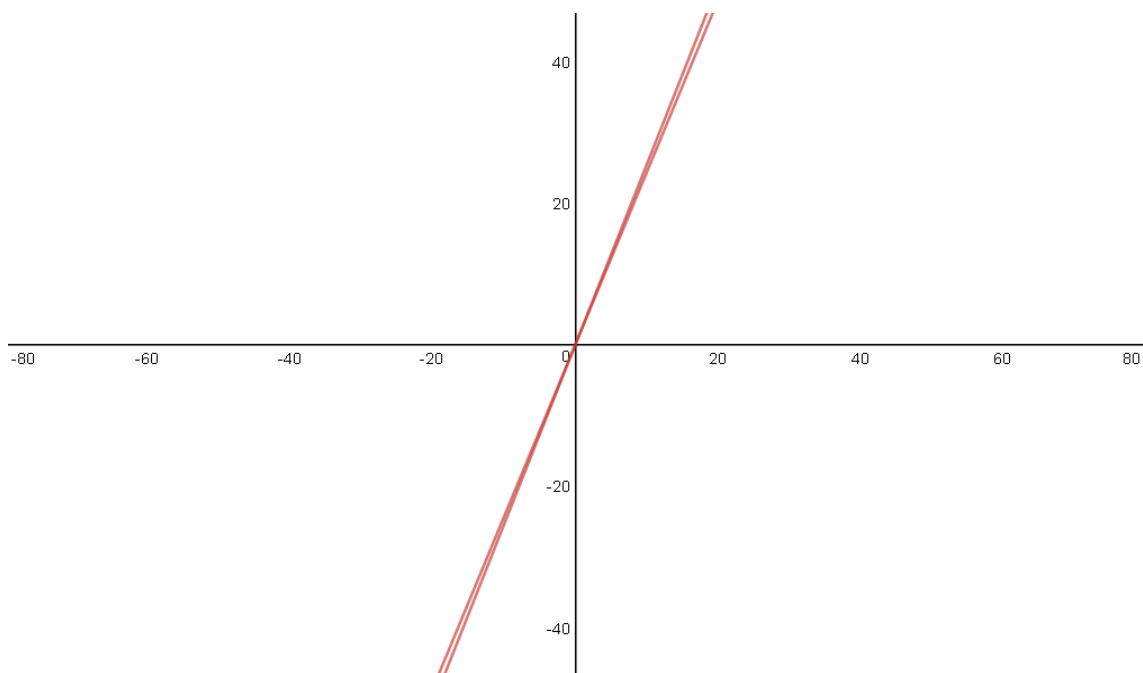
➤ Pentru Golf : $a = 2,42\text{m/s}^2$

t (s)	0	4	10	16	20	24	28
v (m/s)							

2) Reprezentați viteza instantanee în funcție de timp cu ajutorul programului:

<https://www.desmos.com/calculator>





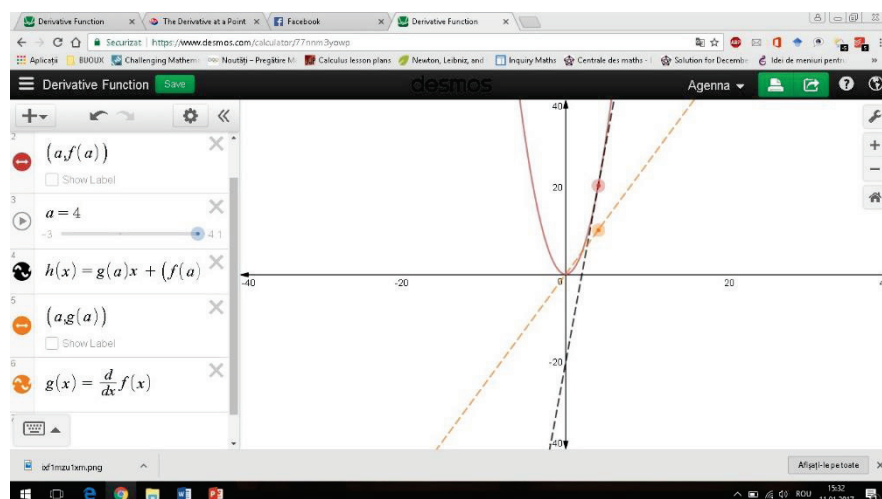
- Urmărind cele două grafice putem spune care dintre cele două mașini este mai performantă ?

➤ **Interpretarea graficului**

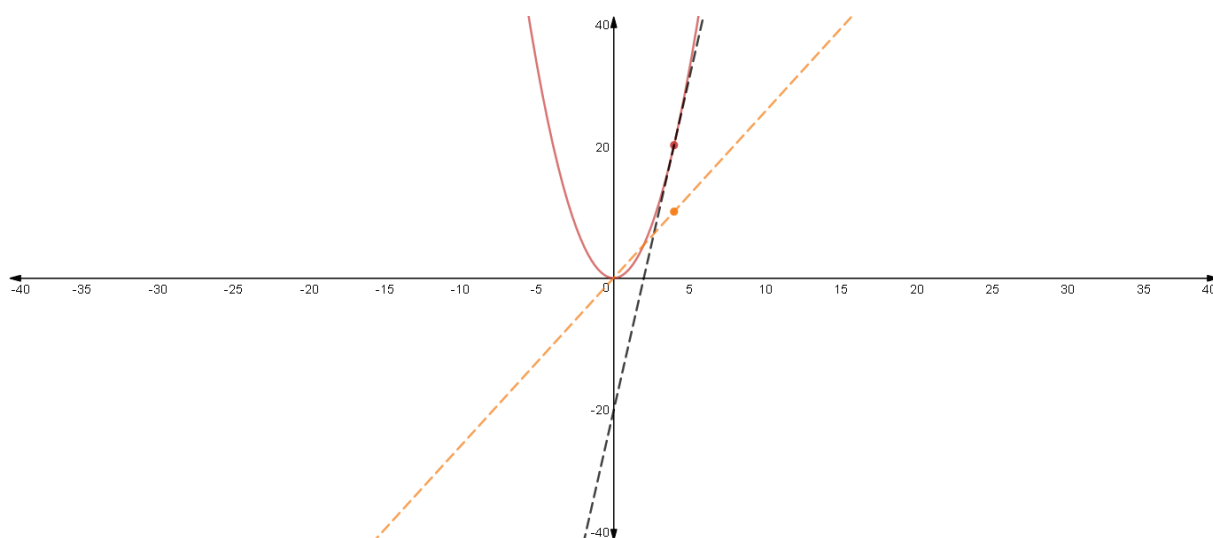
- 1) Distanța d în funcție de timpul t este dată de relația : $d = \frac{a \times t^2}{2}$. Pentru Peugeot 307, avem :

$$d = 1.265t^2$$

Pe calculatorul grafic introduceți funcția : $y = 1.265x^2$ după ce ștergeți datele introduse anterior :



Se obține graficul :



Tangenta la graficul funcției în punctul (4 ; 20,24) este dată de ecuația : $y = 10,12x - 20,24$

Coeficientul unghiular este de 10,12.

Trasați tangentele pentru valorile lui x din tabloul de mai jos și puneți în evidență coeficientul unghiular al tangentei (panta) în punctele precizate:

x	0	4	10	16	20	24	28
coeficientul unghiular al tangentei (panta) p							
p/x							

Cărei caracteristici a lui Peugeot 307 îi asociem valoarea raportului p/x ?

.....

Exprimați p în funcție de x

.....

2) Pentru cealaltă mașină (Golf), distanța d în funcție de timp este dată de relația :

$$d = 1.21t^2$$

- Introducem în Desmos funcția : $y = 1.21x^2$
- Trasați tangentele pentru valorile lui x din tabloul de mai jos și puneți în evidență coeficientul unghiular al tangentei (panta) în punctele precizate:

x	0	4	10	16	20	24	28
Coefficient unghiular (panta) : p							
p/x							

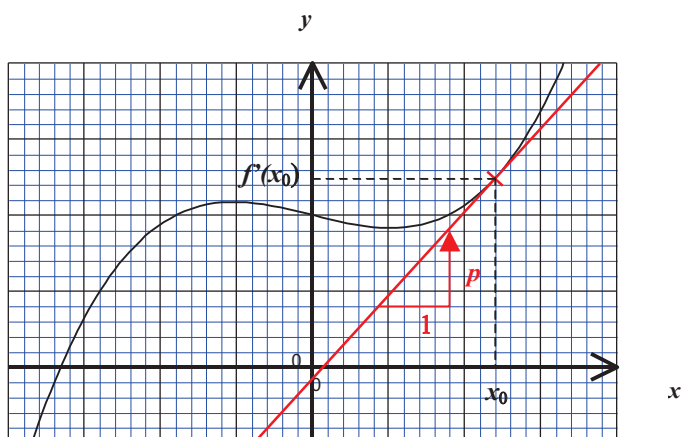
Cărei caracteristici a Golf-ului putem asocia valoarea raportului p/x ?

.....

Exprimați p în funcție de x

Care sunt concluziile voastre ?

➤ **Definiția derivatei unei funcții într-un punct**



Fie $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și un punct $P(x_0; f(x_0))$ pe graficul funcției f .

Tangenta la graficul funcției f în punctul $P(x_0; f(x_0))$ este dată de ecuația :

$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$

unde cu m este notată **panta sau coeficientul unghiular** al tangentei în punctul P .

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Notăm cu $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ și o denumim **derivata funcției în punctul P** .

➤ **Notații pentru derivată:**

Există mai multe modalități diferite pentru a nota derivata unei funcții într-un punct x_0 (așa cum apar ele, de-a lungul istoriei matematice, la diferiți matematicieni):

$f'(x_0)$ – notatia lui Lagrange

$\frac{df}{dx}$ – notatia lui Leibniz

$\frac{\partial f}{\partial x}$ – derivata partiala a lui f

$\dot{f}$ – derivata in raport cu timpul, folosita in fizica - notatia lui Newton

➤ DE REȚINUT!

I. DERIVATA UNEI FUNCȚII ÎNTR-UN PUNCT

Fie funcția $f:D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ un punct de acumulare mulțimii D .

➤ Se spune că funcția f are derivată în punctul $x_0 \in D$ dacă există limita:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ în } \overline{\mathbb{R}}$$

➤ Această limită se numește derivata funcției f în punctul x_0 , și se notează:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

➤ Se spune că funcția f este derivabilă în punctul $x_0 \in D$ dacă limita de mai jos există și este finită:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

V. Feedback

Se lucrează la tablă exercițiile următoare:

Să se studieze derivabilitatea funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ în punctele indicate:

a) $f(x) = x + 5$, $x_0 = 3$

b) $g(x) = x^2$, $x_0 = 1$

c) $h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $h(x) = \frac{2017}{x}$, $x_0 = 2018$

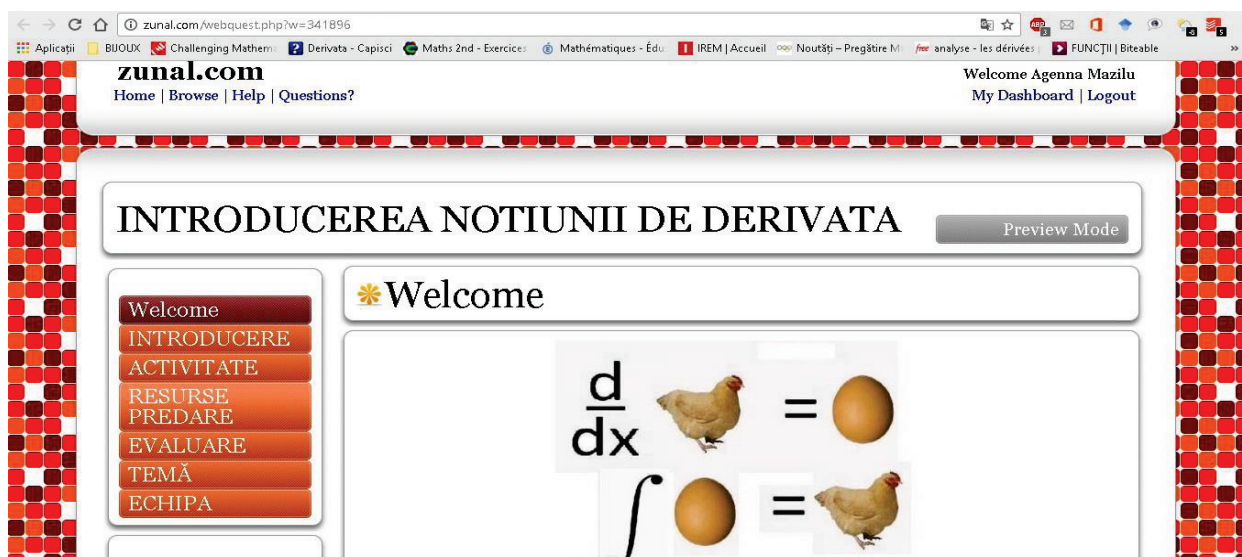
VI. Tema pentru acasă:

1) Calculați derivatele funcțiilor următoare în punctele indicate:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ în punctul $x_0 = 2$

- b) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{x}$ în punctul $x_0 = 1$
- c) $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ în punctul $x_0 = 0$
- d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin 5x, x_0 = \frac{\pi}{2}$
- 2) <https://brilliant.org/problems/standing-on-the-shoulders-of-giants-instantenous/>
- 3) Prezentați un exemplu de aplicație a derivabilității unei funcții într-un punct din biologie/chimie/economie/ș.a.

Lecția și resursele de descărcat (fișe de lucru, filme, PowerPoint-uri) se găsesc pe platforma educațională www.zunal.com, la link-ul: [Introducerea notiunii de derivata](#). În acest mod, elevii pot revedea acasă secvențe relevante din lecție, modele de exerciții rezolvate, pot accesa link-uri către materiale suplimentare și pot completa un quiz cu noțiunile importante din lecție.



Sugestii pentru profesori:

❖ Platforme tip Moodle

www.zunal.com

<http://learningdesigner.org/index.php>

❖ Soft educațional:

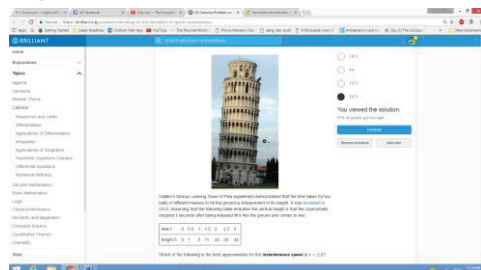
<https://www.desmos.com/>

<https://www.desmos.com/calculator>

<https://www.geogebra.org/o/cbfSBqPt>

http://portal.edu.ro/materiale_ael

- ❖ Prezentare completă a temei (teorie și aplicații): site-ul Khan Academy:
<https://www.khanacademy.org/math/differential-calculus/derivative-intro-dc>
- ❖ Probleme și aplicații interdisciplinare (matematică – fizică) se găsesc pe site-ul:
<https://brilliant.org/>



- ❖ Exemplu: Galilei & Turnul din Pisa
<https://brilliant.org/problems/standing-on-the-shoulders-of-giants-instantaneous/>
<https://www.youtube.com/watch?v=Kv-U5tjNCY>
- ❖ Alte resurse online

Ce predăm:

<http://www.methodmaths.fr/derivee/#derivee>

<http://villeminegerard.free.fr/Wwwgymm/Analyse/AnaDerCa.htm>

<http://numerisation.irem.univ-mrs.fr/PS/IPS15003/IPS15003.pdf> (studii de caz, limba franceză)

Cum predăm:

<https://betterexplained.com/articles/calculus-building-intuition-for-the-derivative/>

<http://realteachingmeansrealllearning.blogspot.ro/2011/05/driving-and-deriving-in-math-class.html>

Resurse video (youtube):

<https://goo.gl/mOHWZW>

<https://goo.gl/onVB4R>

<https://goo.gl/FNxbJP>

<https://www.youtube.com/watch?v=6Dyllq4CK-8>



Resurse interactive:

<http://www.mathsisfun.com/calculus/derivatives-introduction.html>

<http://www.wolframalpha.com/calculators/derivative-calculator>

Joc matematic:

http://www.maa.org/sites/default/files/images/upload_library/47/Margolius/matchinggame.html

Referințe bibliografice:

- Elemente de analiză matematică, clasa a XI-a, Gh. Gussi, O. Stănășilă, T. Stoica / EDP, 1989
- Manual de matematică – cu aplicații informatice, clasa a XI-a M. Bălună, M. Becheanu, B. Enescu, R. Gologan, A. Vernescu Ed. Curtea veche, 2004
- Aplicații în economie- Anexă
- <http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/>
- <http://villemine.gerard.free.fr/Wwwgvm/Analyse/AnaDerDe.htm>
- http://ssmr.ro/files/istorie_matematica/metoda.pdf
- <https://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9riv%C3%A9e>

Anexă:

Aplicații în economie

6.1 Funcții marginale de cost, venit și profit

Costul marginal reprezintă rata instantanee de schimbare a funcției de cost total și, în mod natural, ea se definește cu ajutorul derivatelor.

Dacă $C = C(x)$ este funcția de cost total a unui anumit produs, atunci derivata sa de ordinul întâi $CM(x) = C'(x)$ se numește *funcția de cost marginal*.

Funcțiile de cost total și de cost marginal sunt reprezentate în Figura 6.1.

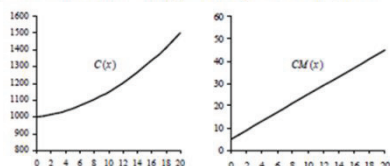


Figura 6.1: Funcțiile de cost total și cost marginal

Deoarece, în mod natural, realizarea a mai multor produse duce la creșterea costului total, rezultă următoarele proprietăți ale funcției de cost total:

- Costul total nu poate fi negativ. Dacă există costuri fixe, atunci costul total este pozitiv;
- Funcția de cost total este întotdeauna crescătoare. Ca urmare, funcția de cost marginal este întotdeauna pozitivă.
- Graficul majorității funcțiilor de cost marginal are o formă de „U”. De obicei există un interval în care funcția $CM(x)$ poate să dească, urmat de intervalul de creștere.

Reprezentarea grafică este dată în Figura 6.2.

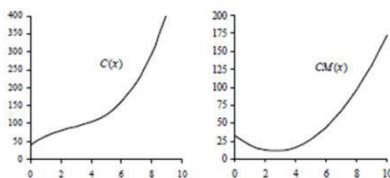


Figura 6.2: Funcțiile de cost total și cost marginal

Funcția de venit marginal a unui produs reprezintă rata instantanee de schimbare a funcției de venit, adică derivata întâi:

$$VM(x) = V'(x).$$

Dacă funcția de cerere a unui produs într-o piață cu monopol este $p = f(x)$, venitul total rezultat pentru x produse este:

$$V(x) = px = f(x) \cdot x.$$

Graficul funcțiilor de venit total și venit marginal este reprezentat în Figura 6.3.

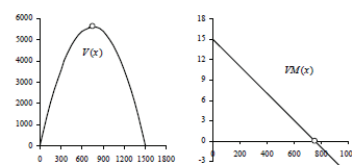


Figura 6.3: Funcțiile de venit total și venit marginal

Similar costului și veniturii marginale, derivata funcției de profit ne furnizează *profitul marginal*. Dacă $P(x)$ este funcția de profit total a unui produs, atunci $PM(x) = P'(x)$ este *funcția de profit marginal*.

Știind că $P(x) = V(x) - C(x)$, atunci avem:

$$PM(x) = P'(x) = [V'(x) - C'(x)] = V'(x) - C'(x).$$

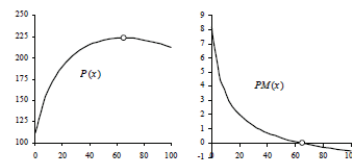


Figura 6.4: Funcțiile de profit total și profit marginal

Într-o piață cu competiție, acțiunile unei firme nu influențează de obicei prețul produsului, care este determinat de piață, la intersecția funcției de cerere (considerând toți consumatorii) cu funcția de ofertă (considerând toți furnizorii). Rezultă că într-o piață cu competiție, venitul total al unei firme este $V(x) = px$, unde p este prețul de echilibru de piață, iar x este cantitatea de produse vândute.