MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

CLASA a IX-a – soluţii

Punctaj din oficiu .... **10 p**

Problema 1. Considerăm numerele reale a, b, c şi ecuaţiile $x^2 + 4ax + (b+c)^2 = 0$, $x^2 + 4bx + (c+a)^2 = 0$, respectiv $x^2 + 4cx + (a+b)^2 = 0$.

a) Arătaţi că cel puţin una dintre cele trei ecuaţii are soluţii reale.

b) Demonstraţi că dacă ecuaţiile admit o soluţie reală comună atunci $a = b = c$..

Soluţie. a) Presupunem prin absurd ca toate cele trei ecuaţii nu au solutii reale. Atunci toţi cei trei discriminanţi sunt negativi,

$$16a^2 - 4(b+c)^2 < 0,\ 16b^2 - 4(c+a)^2 < 0,\ 16c^2 - 4(a+b)^2 < 0.$$

.... **1,5p**

Prin simplificare cu 4 si adunarea celor trei inegalitati deducem

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - (b+c)^2 - (c+a)^2 - (a+b)^2 < 0$$

.... **3p**

Astfel

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - (b^2 + 2bc + c^2) - (c^2 + 2ca + a^2) - (a^2 + 2ab + b^2) < 0$$

deci

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2bc - 2ca - 2ab < 0.$$

.... **3p**

În concluzie

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) < 0 \text{ deci } (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 < 0,$$

ceea ce constituie o contradicţie.

Aşadar cel puţin o ecuaţie are soluţii reale. **6p**

b) Fie x_0 soluţia reală comună a celor trei ecuaţii. Prin adunarea celor trei egalităţi obţinem

$$3x_0^2 + 4(a+b+c)x_0 + 2(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) = 0.$$

.... **3p**

Prin urmare ecuaţia de gradul doi corespunzătoare are discriminantul nenegativ, adică

$$16(a+b+c)^2 - 24(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) \geq 0.$$

Deducem $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \leq 0$, deci fiecare pătrat este zero adică $a = b = c$.
.... **6p**

Problema 2. Fie patrulaterul convex $ABCD$, punctul O de intersecţie a diagonalelor sale şi G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, ABC, respectiv ODC. Demonstraţi că O este centrul de greutate al triunghiului $G_1G_2G_3$ dacă şi numai dacă $ABCD$ este paralelogram.

Gazeta Matematică

Soluţie.
Dacă O este centrul de greutate al triunghiului $G_1G_2G_3$ atunci $\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2} + \overrightarrow{OG_3} = \overrightarrow{0}$.
.... **1,5p**

Cum G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, ABC, respectiv ODC, folosind relaţia lui Leibniz, egalitatea de mai sus devine:

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{0},$$

prin urmare

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}.$$

.... **6p**

Vectorii $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}$ sunt coliniari deci există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA}$. Analog există $\beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{OD} = \beta\overrightarrow{OB}$, deci obţinem:

$$(1+\alpha)\overrightarrow{OA} + (1+\beta)\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{0}.$$

.... **6p**

Deoarece $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ sunt necoliniari, ultima egalitate este echivalentă cu $1+\alpha = 1+\beta = 0$, adică $\alpha = \beta = -1$, ceea ce înseamnă că O este mijlocul segmentelor AC şi BD, deci $ABCD$ este paralelogram.
.... **3p**

Reciproc, dacă $ABCD$ este paralelogram, avem: $\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OG_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OG_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC})$ şi atunci $\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2} + \overrightarrow{OG_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{0}$, deci O este centrul de greutate al triunghiului $G_1G_2G_3$.
.... **6p**

Problema 3. Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care numărul

$$4^{n-1} + n^2 + 11$$

este pătrat perfect.

Soluţie.
Din ipoteză rezultă că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $k^2 = 4^{n-1} + n^2 + 11 > 4^{n-1}$.

. . . . **1,5p**

Prin urmare, $k > 2^{n-1}$. **3p**

Atunci $k \geq 2^{n-1} + 1$, deci $4^{n-1} + n^2 + 11 \geq (2^{n-1} + 1)^2$, de unde rezultă că $n^2 + 10 \geq 2^n$.
. . . . **6p**

Pe de altă parte, prin inducţie matematică se demonstrează imediat că $2^n > n^2 + 10, \forall n \geq 6$. Într-adevăr, $2^6 > 6^2 + 10$ şi presupunând că $2^n > n^2 + 10$ pentru un număr natural oarecare $n \geq 6$, avem $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2(n^2 + 10) > (n+1)^2 + 10$.
. . . . **6p**

Prin urmare, din $n^2 + 10 \geq 2^n$ rezultă că $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. **3p**

În final, observăm că singurul număr care verifică ipoteza este $n = 3$. **3p**

Problema 4. Determinaţi şirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere naturale nenule care verifică simultan următoarele două condiţii:

$$(1)\ i + j \text{ divide } a_i + a_j;$$
$$(2)\ a_i + a_j \text{ divide } (i+j)^2,$$

pentru orice i, j numere naturale nenule.

Soluţie. Vom arăta că $a_i = i$ pentru orice $i \geq 1$. Evident, acest şir satisface ipoteza.
. . . . **1,5p**

Pentru $i = j$ în relaţiile din enunţ obţinem $i \mid a_i \mid 2i^2$ **(*)** pentru orice $i \geq 1$. Pentru $i = 1$ deducem $a_1 \in \{1, 2\}$. **3p**

Pentru $i = 2$ avem $a_2 \in \{2, 4, 8\}$. Pentru $i = 1,\ j = 2$ obţinem $3|a_1 + a_2|9$. Singurele posibilităţi sunt $a_1 = 1,\ a_2 = 2$ sau $a_1 = 1,\ a_2 = 8$. În ambele cazuri, $a_1 = 1$. **3p**

Din **(*)** obţinem $3|a_3|18$ deci $a_3 \in \{3, 6, 9, 18\}$ iar din enunţ pentru $i = 2$ şi $j = 3$ deducem $5|a_2 + a_3|25$. Dacă $a_2 = 8$ atunci 5 nu divide $a_2 + a_3$, deci $a_2 = 2$. **3p**

Fie acum $i \geq 3$. Din **(*)** deducem că există un şir $(b_n)_{n \geq 1}$ de numere naturale nenule cu $a_i = ib_i$ şi $b_i|2i$ pentru orice $i \geq 3$. Pentru $j = 1$ în relaţiile din enunţ avem $i + 1|ib_i + 1|(i+1)^2$. Dar $i + 1|ib_i + b_i$ şi prin scădere, $i + 1|b_i - 1$. **6p**

Dacă prin absurd $b_i > 1$, din relaţia de mai sus obţinem $b_i - 1 \geq i + 1 \iff b_i \geq i + 2$, dar cum $b_i|2i$, deducem $b_i = 2i$. De aici avem $1 + 2i^2|(1+i)^2$, deci $1 + 2i + i^2 \geq 1 + 2i^2 \iff 2i \geq i^2 \iff 2 \geq i$ ceea ce constituie o contradicţie pentru $i \geq 3$.
În concluzie $b_i = 1$ deci $a_i = i$ pentru orice $i \geq 1$. **6p**

Observaţie. Condiţia (1) din ipoteză nu este necesară. Se poate arăta prin inducţie că $a_i = i$ pentru orice $i \geq 1$ folosind doar condiţia (2) şi Postulatul lui Bertrand.