Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2026

CLASA a VI-a – soluții

Punctaj din oficiu .... **10 p**

Problema 1. Considerăm mulțimile:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant 1000 \text{ și } n \text{ dă restul 2 la împărțirea cu 3}\},$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant 1000 \text{ și } n \text{ dă restul 1 la împărțirea cu 7}\}.$$

a) Care este cel mai mic element al mulțimii $A \cap B$?
b) Aflați numărul elementelor mulțimii $A \cup B$.

Soluție. a) $A = \{2, 5, 8, \ldots\}$ și $B = \{1, 8, 15, \ldots\}$, deci numărul cerut este $m = 8$ **4,5p**

b) Elementele mulțimii A sunt de forma $n = 3m+2$, cu $m \in \mathbb{N}$. Din condiția $3m+2 \leqslant 1000$, obținem $m \leqslant 332$, deci m ia valorile $0, 1, 2, \ldots, 332$. Rezultă că A are 333 de elemente **3p**

Elementele mulțimii B sunt de forma $n = 7p + 1$, cu $p \in \mathbb{N}$. Din condiția $7p + 1 \leqslant 1000$, obținem $p \leqslant 142$, deci p ia valorile $0, 1, 2, \ldots, 142$. Rezultă card $B = 143$ **3p**

Dacă $x \in A \cap B$, atunci $x \leqslant 1000$ și $x - 8$ este divizibil cu 3 și cu 7, deci cu 21.......... **3p**

Reciproc, dacă $21 \mid x - 8$ și $x \leqslant 1000$, atunci $x - 8$ este divizibil cu 3 și cu 7, deci x dă la împărțirea cu 3 și cu 7 aceleași resturi ca 8, așadar $x \in A \cap B$ **3p**

Reiese că $x = 21k + 8 \leqslant 1000$, $k \in \mathbb{N}$, deci $0 \leqslant k \leq 47$, iar $A \cap B$ are 48 de elemente **3p**

Numărul elementelor mulțimii $A \cup B$ se obține adunând numărul elementelor mulțimii A cu numărul elementelor mulțimii B și scăzând numărul elementelor comune. Rezultă că $A \cup B$ are 428 de elemente **3p**

Problema 2. Determinați numărul natural prim x și numărul natural nenul y având proprietatea $\dfrac{x}{2y} = \dfrac{x+1}{x+y+8}$.

Soluție. Relația din enunț se scrie sub forma $x\,(x+y+8) = 2y(x+1)$, $(*)$ **1,5p**

Rezultă că x divide produsul $2 \cdot y \cdot (x+1)$. Cum numărul x este prim, înseamnă că x divide 2, x divide y sau x divide $x+1$ **3p**

În primul caz obținem $x = 2$ și $y = 5$ **6p**

În al doilea caz, fie $y = dx$, unde d este un număr natural nenul. Înlocuind în $(*)$, deducem după calcule că $x + 8 = d\,(x+2)$. Este evident că nu putem avea $d = 1$ **3p**

Atunci $x + 8 \geq 2\,(x+2)$, prin urmare $x \leq 4$. Cum x este prim, înseamnă că $x \in \{2,\ 3\}$. Dacă $x = 2$, atunci $d = \dfrac{5}{2} \notin \mathbb{N}$. Dacă $x = 3$, atunci $d = \dfrac{11}{5} \notin \mathbb{N}$. Așadar, nu obținem soluții în acest caz **3p**

În cel de-al treilea caz, din $x \mid x+1$ rezultă că $x \mid (x+1) - x$, așadar $x \mid 1$. Cum x este prim, nu obținem soluții nici în acest caz **6p**

Soluție alternativă. Relația din enunț se scrie sub forma $x^2 + 8x = y(x+2)$ **4,5p**

Rezultă că $x+2$ divide $x^2 + 8x$, prin urmare $x+2$ divide $\left(x^2 + 8x\right) - x\,(x+2) = 6x$ ... **6p**

În continuare, $x+2$ divide $6(x+2) - 6x = 12$ **6p**

Cum x este număr natural prim, singura valoare admisibilă este $x = 2$ **3p**

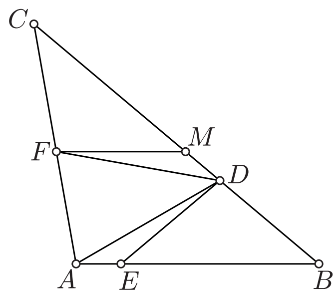
Pentru $x = 2$, din relația $x^2 + 8x = y\,(x+2)$ obținem $y = 5$ **3p**

Notă. Perechile (x, y) de numere naturale (cu y nenul) care verifică egalitatea din enunț sunt $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(4, 8)$ și $(10, 15)$.

Problema 3. Triunghiul ABC este isoscel și are $\angle BAC = 100°$. Cercul de centru C și rază CA taie segmentul BC în D, cercul de centru D și rază DB taie segmentul AB în punctul interior E și cercul de centru D și rază DA taie segmentul AC în punctul interior F.

a) Arătați că $CF = DE$.

b) Paralela prin punctul F la dreapta AB taie latura BC în M. Arătați că $MD = AE$.



Soluție. a) Arătăm că $\triangle BDA \equiv \triangle CFD$, (1) **1,5p**

În triunghiul ABC avem $\angle ABC = \angle ACB = 40°$ **3p**

În triunghiul isoscel CAD avem $\angle CAD = \angle CDA = \dfrac{180° - \angle ACD}{2} = 70°$ **3p**

Reiese $\angle DAB = \angle CAB - \angle CAD = 30°$, $\angle ADB = 180° - \angle DAB - \angle DBA = 110°$, $\angle CFD = 180° - \angle AFD = 110°$. **3p**

Astfel $DA = DF$, $\angle BDA = \angle CFD$ și $\angle ABD = \angle FCD$ deci, conform cazului de congruență LUU, afirmația (1) este demonstrată **3p**

b) Din $FM \parallel AB$ rezultă $\angle CFM = \angle CAB = 100°$. Astfel $\angle DFM = \angle DFC - \angle MFC = 10°$ **3p**

În triunghiul isoscel DEB avem $\angle DEB = \angle DBA = 40°$, de unde $\angle EDB = 100°$, deci $\angle ADE = \angle ADB - \angle EDB = 10°$ **3p**

Deoarece $\angle MFD = \angle EDA$, $FD = DA$ și, din congruența (1), $\angle MDF = \angle EAD$, obținem $\triangle MFD \equiv \triangle EDA$ (ULU), de unde $MD = AE$ **3p**

Problema 4. Vom numi *lente* numerele naturale nenule L care au cel puțin patru divizori și, dacă $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_p = L$ sunt divizorii lui L, atunci fiecare număr din șirul divizorilor, începând cu al patrulea, este mai mic sau egal decât suma a trei dintre divizorii precedenți.

a) Arătați că 72 este un număr lent.

b) Demonstrați că produsul oricăror două numere lente este tot un număr lent.

Soluție. a) Divizorii lui 72 sunt $1 < 2 < 3 < 4 < 6 < 8 < 9 < 12 < 18 < 24 < 36 < 72$, iar $4 < 1 + 2 + 3$, $6 < 2 + 3 + 4$, $8 < 3 + 4 + 6$, etc **4,5p**

b) Fie M și N două numere lente. Atunci orice divizor al lui MN este de forma mn, unde $m \mid M$ și $n \mid N$ **3p**

Dacă m nu este unul dintre cei mai mici trei divizori ai lui M, atunci $m \leqslant m_1 + m_2 + m_3$, unde $m_1 < m_2 < m_3 < m$ sunt divizori ai lui M. Reiese $mn \leqslant m_1n + m_2n + m_3n$, iar $m_1n < m_2n < m_3n < mn$ sunt divizori ai lui MN. Analog, dacă n nu este unul dintre cei mai mici trei divizori ai lui N. Astfel, în acest caz, mn este mai mic sau egal decât suma a trei divizori ai numărului MN care îl preced **6p**

Pentru cazurile rămase, observăm că un număr lent L este divizibil cu 6. În caz contrar, dacă $2 \nmid L$, atunci divizorii precedenți lui L sunt cel mult $\dfrac{L}{3}, \dfrac{L}{5}, \dfrac{L}{7}$, deci au suma cel mult $L\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7}\right) < L$, iar dacă $3 \nmid L$, atunci divizorii precedenți lui L sunt cel mult $\dfrac{L}{2}, \dfrac{L}{4}, \dfrac{L}{5}$, deci au suma cel mult $L\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5}\right) < L$ **6p**

Rezultă că rămân de analizat cazurile $m, n \in \{1, 2, 3\}$, deci $mn \in \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$. Dacă $mn \leqslant 3$ atunci mn este unul dintre primii trei termeni ai șirului divizorilor, dacă $mn \in \{4, 6\}$ atunci $mn \leqslant 1 + 2 + 3$, iar dacă $mn = 9$, atunci $mn \leqslant 2 + 3 + 6$ **3p**