Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

CLASA a XII-a – soluţii

Punctaj din oficiu .... **10 p**

Problema 1. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă, cu derivata a doua continuă pe $\mathbb{R}$, cu proprietatea că* $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ *şi* $\int_0^1 x \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot f(x)\,dx$.

a) Demonstraţi că dacă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie polinomială de gradul al doilea, având graficul simetric în raport cu dreapta de ecuaţie $x = \frac{1}{2}$, atunci $\int_0^1 f(x) \cdot g(x)\,dx = 0$.

b) Demonstraţi că există $c \in (0,1)$, astfel încât $f''(c) = 0$.

Gazeta Matematică

Soluţie. a) Axa de simetrie a graficului unei funcţii de gradul al doilea este dreapta verticală care trece prin vârful parabolei asociate. **1,5p**

Prin urmare, funcţiile de gradul al doilea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care au graficul simetric în raport cu dreapta de ecuaţie $x = \frac{1}{2}$ sunt de forma:

$g(x) = a \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + d = a \cdot \left(x^2 - x\right) + b$, cu $a, b, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b = d + \frac{a}{4}$. **3p**

$\int_0^1 f(x) \cdot g(x)\,dx = a \cdot \int_0^1 x^2 \cdot f(x)\,dx - a \cdot \int_0^1 x \cdot f(x)\,dx + b \cdot \int_0^1 f(x)\,dx = 0.$ **3p**

b) f'' fiind o funcţie continuă, funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f''(x) \cdot (x^2 - x)^2$ este continuă, deci este integrabilă. **3p**

$$\int_0^1 f''(x) \cdot (x^2 - x)^2\,dx = f'(x) \cdot (x^2 - x)^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x) \cdot 2(x^2 - x) \cdot (2x - 1)\,dx =$$

$$= 0 - 2f(x) \cdot (x^2 - x) \cdot (2x - 1)\Big|_0^1 + 2 \cdot \int_0^1 f(x)\left((2x - 1)^2 + 2(x^2 - x)\right)\,dx =$$

$$= 0 + 2 \cdot \int_0^1 f(x) \cdot (6(x^2 - x) + 1)\,dx\,.$$

Conform punctului a), pentru $a = 6$ şi $b = 1$, se obţine $\int_0^1 f''(x) \cdot (x^2 - x)^2\,dx = 0$. **6p**

Rezultă că există $c \in (0,1)$ astfel încât $f''(c) \cdot (c^2 - c)^2 = 0$. **3p**

Cum $(c^2 - c)^2 = c^2 \cdot (c-1)^2 \neq 0$, pentru orice $c \in (0,1)$, rezultă că $f''(c) = 0$. **3p**

Observaţie: În situaţia în care un concurent observă că una dintre funcţiile $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = a(2x-1)$ $(a \in \mathbb{R}^*)$ are proprietatea din enunţ, fără să rezolve problema, primeşte câte 1,5 puncte pentru fiecare dintre aceste două exemple. Punctele astfel obţinute **nu se cumulează** cu cele alocate rezolvărilor parţiale sau complete ale problemei.

Problema 2. *a) Fie $(G, \cdot)$ un grup, iar $f : G \longrightarrow G$ un endomorfism al său. Arătaţi că mulţimea $F_f = \{x \in G |\, f(x) = x\}$ a punctelor fixe ale endomorfismului f este un subgrup al grupului G.*
b) Fie $n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq 2$, iar p cel mai mic divizor prim al lui n. Arătaţi că numărul $m = \dfrac{n}{p} + 1$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea că în orice grup finit $(G, \cdot)$ de ordin n, dacă pentru un endomorfism $f : G \to G$ există un automorfism $g : G \to G$ cu proprietatea că mulţimea $A = \{a \in G |\, f(a) = g(a)\}$ are cel puţin m elemente, atunci f este un automorfism al grupului G.

Soluţie.
a) Fie e elementul neutru al grupului G. Deoarece $(f(e))^2 = f(e^2) = f(e)$, rezultă că $f(e) = e$, deci $e \in F_f$ şi $F_f \neq \emptyset$. **1,5p**
Pentru orice $x, y \in F_f$ avem

$$f(x \cdot y^{-1}) = f(x) \cdot (f(y))^{-1} = x \cdot y^{-1} \,,$$

aşadar $x \cdot y^{-1} \in F_f$. Prin urmare, F_f este un subgrup al grupului G. **6p**
b) Vom arăta că orice endomorfism al unui grup finit de ordin n care coincide cu un automorfism al grupului în cel puţin m puncte este egal cu acel automorfism (deci este un automorfism).
Fie $(G, \cdot)$ un grup de ordin n şi $End(G)$, respectiv $Aut(G)$, mulţimea tuturor endomorfismelor, respectiv mulţimea tuturor automorfismelor sale. Fie $f \in End(G)$ un endomorfism cu proprietatea că există un automorfism $g \in Aut(G)$ astfel încât mulţimea $A = \{a \in G |\, f(a) = g(a)\}$ conţine cel puţin m elemente.
g fiind un automorfism, este un endomorfism bijectiv, iar funcţia sa inversă g^{-1} este de asemenea un automorfism al grupului G. **3p**
Fiind compunere de endomorfisme, funcţia $h = g^{-1} \circ f$ este un endomorfism al grupului G, iar mulţimea punctelor sale fixe este

$$F_h = \{a \in G |\, h(a) = a\} = \{a \in G |\, g^{-1}(f(a)) = a\} = \{a \in G |\, f(a) = g(a)\} = A.$$

. . . . **3p**
Din a), F_h este un subgrup al grupului G şi are cel puţin m elemente. Conform teoremei lui Lagrange, ordinul oricărui subgrup al unui grup finit este un divizor al ordinului grupului. Cum $\dfrac{n}{p}$ este cel mai mare divizor al lui n, mai mic strict decât n, deoarece $|F_h| \geq m = \dfrac{n}{p} + 1 > \dfrac{n}{p}$ şi $|F_h|$ divide $|G| = n$, rezultă că $|F_h| = n = |G|$, aşadar $F_h = G$. **3p**
Prin urmare, $f(a) = g(a)$ pentru orice element $a \in G$, deci $f = g \in Aut(G)$. Aşadar f este un automorfism al grupului G. **3p**
Fie $G = \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_p$, unde $q = \dfrac{n}{p}$. Pentru grupul $(G, +)$, alegem $f : G \longrightarrow G$, $f(x,y) = (x, \hat{0})$,

oricare ar fi $(x, y) \in \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_p$. Funcţia f este un endomorfism al unui grup de ordin n, cu proprietatea că mulţimea $A = \{(x, y) \in G |\, f(x, y) = id_G(x, y)\}$ are $q = \frac{n}{p} = m - 1$ elemente (prin id_G am notat automorfismul identic al grupului G), dar f nu este un automorfism al grupului G. Prin urmare, m este cel mai mic număr cu proprietatea din enunţ........................ **3p**

Problema 3. *Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e, iar H un subgrup al său cu $H \neq \{e\}$ şi $H \neq G$. Dacă $(xy)^2 = yx$ pentru orice $x, y \in G \setminus H$, demonstraţi că:*
a) $x^2 = y^3$, pentru orice $x \in G \setminus H$ şi orice $y \in H$;
b) $Z(G) = \{e\}$;
c) H este comutativ.
($Z(G) = \{z \in G |\, z \cdot g = g \cdot z, \forall g \in G\}$ este centrul grupului G, format din toate elementele grupului G care comută cu orice element al grupului G.)

Soluţie.
a) Pentru $x = y \in G \setminus H$, relaţia din ipoteză devine $x^4 = x^2$ de unde obţinem că $x^2 = e$, pentru orice $x \in G \setminus H$. (1) **3p**
Fie $x \in G \setminus H$ şi $y \in H$. Deoarece H este subgrup al lui G, avem $xy \in G \setminus H$. **1,5p**
Rezultă atunci că: $y^2 \overset{(1)}{=} (x^2 y)^2 = (x(xy))^2 = (xy)x = xyx$, ... **3p**
deci $y^3 = xyxy = (xy)^2 \overset{(1)}{=} e \overset{(1)}{=} x^2$. **3p**

b) Pentru orice $x \in G \setminus H$ şi $y \in H \setminus \{e\}$, din a) rezultă că $xy = (xy)^{-1} = y^2 x \neq yx$. **3p**
Prin urmare, niciun element $x \in G \setminus H$ şi niciun element $y \in H \setminus \{e\}$ nu se află în $Z(G)$ şi, în consecinţă, $Z(G) = \{e\}$ **3p**

c) Oricare ar fi $x \in G \setminus H$ şi $h \in H$, din $(xh)^2 = e$ rezultă că $xhx = h^{-1}$, deci $h = xh^{-1}x$ $(*)$
.... **3p**
Pentru orice $h_1, h_2 \in H$ şi $x \in G \setminus H$ avem atunci:

$$h_1 h_2 \overset{(*)}{=} x\,(h_1 h_2)^{-1}\,x = x h_2^{-1} h_1^{-1} x = x h_2^{-1} x^2 h_1^{-1} x = \left(x h_2^{-1} x\right)\left(x h_1^{-1} x\right) \overset{(*)}{=} h_2 h_1,$$

aşadar H este comutativ. **3p**

Observaţie: Subgrupul H este, în condiţiile problemei, un subgrup normal al grupului G, iar aplicaţia de inversare fiind un automorfism al grupului H, ca restricţie la H a oricărui automorfism interior al lui G indus de un element oarecare $x \in G \setminus H$, grupul H este comutativ. Orice soluţie care arată acest lucru va primi complet punctajul de **6p** aferent subpunctului c).

Problema 4. *Fie $f : [0, 1] \to [0, 1]$ o funcţie continuă şi bijectivă, cu proprietatea că*

$$f(x) < x, \quad \textit{pentru orice } x \in (0, 1).$$

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ funcţii}}$ şi $I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx$.
a) Demonstraţi că pentru orice $x \in (0, 1)$, $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$.
b) Determinaţi $\lim_{n \to \infty} I_n$.

Soluţie.

a) Deoarece f este continuă, trecând la limită, când $x \to 0$, din inegalitatea din enunţ obţinem $0 \leqslant f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) \leqslant 0$, deci $f(0) = 0$. **1,5p**

Funcţia f este continuă şi injectivă, deci este strict monotonă. Deoarece $f(0) = 0$, rezultă că f este strict crescătoare. **3p**

Fie $x \in (0, 1)$. Din $f(x) < x$ rezultă inductiv că $0 < f_{n+1}(x) = f(f_n(x)) < f_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece şirul $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ este strict descrescător şi mărginit, există $a(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in [0, 1)$. Folosind continuitatea funcţiei f rezultă că

$$a(x) = \lim_{n\to\infty} f_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} f(f_n(x)) = f\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = f(a(x)),$$

aşadar $a(x) = 0$, adică $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, oricare ar fi $x \in (0, 1)$. **3p**

b) Fie $\varepsilon \in (0, 1)$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fiind compunere de funcţii bijective strict crescătoare, funcţia f_n este bijectivă şi strict crescătoare, cu $f_n(1) = 1$. **3p**

Obţinem că

$$0 < I_n = \int_0^{1-\varepsilon} f_n(x)\,dx + \int_{1-\varepsilon}^{1} f_n(x)\,dx \leqslant (1-\varepsilon)\cdot f_n(1-\varepsilon) + \varepsilon \cdot f_n(1) = (1-\varepsilon)\cdot f_n(1-\varepsilon) + \varepsilon.$$

.... **6p**

Cum $1 - \varepsilon \in (0, 1)$, conform a) obţinem că $\lim_{n\to\infty} f_n(1-\varepsilon) = 0$, astfel că

$$0 \leq \liminf I_n \leq \limsup I_n \leq \varepsilon\,.$$

.... **3p**

Cum $\varepsilon \in (0, 1)$ a fost oarecare, rezultă că $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$. **3p**

Observaţie: În limbaj de integrabilitate Lebesgue (teorie neelementară), enunţul este o consecinţă a teoremei convergenţei dominate (care nu are o demonstraţie elementară). Concurenţilor care invocă teoreme de teoria măsurii, pentru a rezolva punctul b) al problemei, li se va acorda punctajul doar în cazul în care enunţă corect aceste teoreme şi verifică dacă sunt îndeplinite toate condiţiile pentru aplicarea lor.