MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

CLASA a XI-a – soluţii

Punctaj din oficiu **10p**

Problema 1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă, cu proprietatea

$$\det(A + A^{-1}) + \det(A - A^{-1}) = 4.$$

Arătaţi că $\det(A + A^{-1}) = (\operatorname{Tr}(A))^2$, unde $\operatorname{Tr}(A)$ este suma elementelor diagonalei principale a matricei A.

Soluţie. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o matrice cu proprietăţile din enunţ. Notăm $D = \det(A)$.
Cum matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este inversabilă, $D \in \mathbb{R}^*$. **1,5p**
Inversa matricei A este: $A^{-1} = \dfrac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ **3p**
Determinantul inversei matricei A este: $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{D}$ **3p**
Prin calcul direct, sau utilizând identitatea

$$\det(X + Y) + \det(X - Y) = 2(\det(X) + \det(Y)),\ \forall\, X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),$$

obţinem $\det(A + A^{-1}) + \det(A - A^{-1}) = 2\left(D + \dfrac{1}{D}\right)$ **9p**
Conform ipotezei, $2\left(D + \dfrac{1}{D}\right) = 4$, de unde $D = 1$. **3p**
Atunci $\det(A + A^{-1}) = \begin{vmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{vmatrix} = (a+d)^2 = \operatorname{Tr}^2(A)$. **3p**

Problema 2. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu $x_1, x_2 \in (0,1)$, pentru care

$$x_{n+2} = x_n^2 \cdot x_{n+1} - x_n^2 + 1,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_1 x_2 \dots x_n = 0$.

b) Determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot x_1 x_2 \dots x_n$.

Gazeta Matematică

Soluţie.

a) Demonstrăm prin inducţie proprietatea

$$x_n \in (0,1),\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

$x_1, x_2 \in (0,1)$, conform definiţiei şirului. Presupunem că, pentru un număr natural nenul n, avem $x_k \in (0,1),\ \forall k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$. Conform relaţiei de recurenţă, $x_{n+2} = 1 - x_n^2(1 - x_{n+1})$. Cum $x_n, x_{n+1} \in (0,1)$, avem $x_n^2(1 - x_{n+1}) \in (0,1)$, de unde obţinem $x_{n+2} \in (0,1)$.

Astfel, proprietatea (1) este probată pe baza principiului al II-lea al inducţiei matematice. **3p**

Atunci $1 - x_{n+2} = x_n^2(1 - x_{n+1}) < 1 - x_{n+1}$. Prin urmare, $x_{n+1} < x_{n+2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. **3p**

Rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 2}$, strict crescător şi mărginit superior de 1, este convergent........ **1,5p**

Atunci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este de asemenea convergent. Notăm $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in (0,1]$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem $\ell = \ell^3 - \ell^2 + 1$. Rezultă $(\ell - 1)^2(\ell + 1) = 0$, de unde $\ell = 1$. În concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. **3p**

Din relaţia de recurenţă deducem $x_k^2 = \dfrac{1 - x_{k+2}}{1 - x_{k+1}},\ \forall k \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$$x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2 = \frac{1 - x_3}{1 - x_2} \cdot \frac{1 - x_4}{1 - x_3} \cdot \ldots \cdot \frac{1 - x_{n+2}}{1 - x_{n+1}} = \frac{1 - x_{n+2}}{1 - x_2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - x_{n+2}}{1 - x_2} = 0$. Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} x_1 x_2 \ldots x_n = 0$ **3p**

b) Conform (2), avem $n x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2 = \dfrac{n(1 - x_{n+2})}{1 - x_2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Pentru calculul limitei şirului $y_n = n(1 - x_{n+2}),\ n \geq 1$, vom aplica Teorema Stolz-Cesàro................................ **3p**

Astfel, utilizând relaţia de recurenţă, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{1 - x_{n+3}} - \frac{1}{1 - x_{n+2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1 - x_{n+2})(1 - x_{n+3})}{x_{n+3} - x_{n+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1 - x_{n+2})(1 - x_{n+3})}{(1 - x_{n+2})(1 + x_{n+1})(1 - x_{n+1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 x_{n+1}^2}{1 + x_{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot x_1 x_2 \ldots x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2(1 - x_2)}}$ **6p**

Problema 3. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Determinaţi toate matricele $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că, dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = M$, atunci $BA = M$.

Soluţie. Fie $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Dacă matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ au proprietatea $AB = \lambda I_n$ atunci A şi B sunt inversabile, cu $A^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} B$. **1,5p**

Rezultă $\left(\dfrac{1}{\lambda} B\right) A = I_n$, deci $BA = \lambda I_n$. Prim urmare, matricele λI_n, cu $\lambda \in \mathbb{C}^*$, satisfac proprietatea din enunţ. **6p**

Presupunem că matricea $M = (m_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are proprietatea din enunţ.

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice inversabilă. Definim $B = A^{-1}M$. Atunci $AB = M$, deci $BA = M$. Obţinem $A^{-1}MA = M$, de unde $MA = AM$. Prin urmare, M comută cu orice matrice inversabilă. **3p**

Fie $E_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matricea având elementul situat pe poziţia $(1, j)$ egal cu 1 şi iar restul elementelor egale cu 0, pentru fiecare $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Avem $\det(I_n + E_j) = \begin{cases} 2, & j = 1 \\ 1, & j \in \{2, \ldots, n\} \end{cases}$.

Rezultă că matricea $I_n + E_j$ este inversabilă. Atunci $(I_n+E_j)M = M(I_n+E_j)$, de unde obţinem $E_jM = ME_j,\ j = 1, 2, \cdots, n$. Matricea E_jM are prima linie egală cu $(m_{j1}\ m_{j2}\ \cdots\ m_{jn})$ şi restul liniilor nule, iar matricea ME_j are coloana j egală cu $\begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{pmatrix}$ şi restul coloanelor nule.
Rezultă $m_{jk} = 0,\ \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \ \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{j\}$ şi $m_{jj} = m_{11},\ \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Prin urmare, M este o matrice diagonală de forma $M = \lambda I_n$, cu $\lambda \in \mathbb{C}$. **9p**
Matricea nulă (cazul $\lambda = 0$) nu satisface proprietatea din enunţ. Astfel, $E_2E_1 = O_n$. dar $E_1E_2 = E_2 \neq O_n$.

În concluzie, matricele M cu proprietatea din enunt sunt de forma λI_n, cu $\lambda \in \mathbb{C}^*$. **3p**

Problema 4. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi neconstantă. Considerăm funcţia $g : \mathrm{Im}(f) \to \mathbb{R}$ definită prin

$$g(y) = \inf\{x \in [0, 1] \mid f(x) = y\},\ \text{pentru orice } y \in \mathrm{Im}(f),$$

unde $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in [0, 1]\}$. Demonstraţi că funcţia g este continuă dacă şi numai dacă există $a \in (0, 1]$ astfel încât f este strict monotonă pe intervalul $[0, a]$ şi $\mathrm{Im}(f) = f([0, a])$.

Soluţie. Pentru $y \in \mathrm{Im}(f)$, mulţimea $\{x \in [0, 1] \mid f(x) = y\}$ este nevidă şi mărginită, deci admite margine inferioară (infimum). În plus, există un şir $(x_n)_{n\geq 1}$, cu termenii în $[0, 1]$, astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = g(y)$ şi $f(x_n) = y,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Cum f este continuă, $f(g(y)) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y$. Astfel, $f(g(y)) = y,\ \forall\, y \in \mathrm{Im}(f)$. (1) **3p**

1) Presupunem că există $a \in (0, 1]$ astfel încât funcţia f este strict monotonă pe intervalul $[0, a]$ şi $\mathrm{Im}(f) = f([0, a])$.
Pe baza ipotezei şi proprietăţii lui Darboux a funcţiei continue f, obţinem $f([0, a]) = [f(0), f(a)]$, dacă f este strict crescătoare pe $[0, a]$, sau $f([0, a]) = [f(a), f(0)]$, dacă f este strict descrescătoare pe $[0, a]$. **1.5p**
Definim funcţiile $f_a : [0, a] \to f([0, a])$, cu $f_a(x) = f(x)$, pentru oricare $x \in [0, a]$, şi $g_a : f([0, a]) \to [0, a],\ g_a(y) = g(y) \in [0, a]$, pentru oricare $y \in f([0, a]) = \mathrm{Im}(f)$. Conform (1), $(f_a \circ g_a)(y) = f(g(y)) = y$, pentru oricare $y \in f([0, a])$. Funcţia $f_a : [0, a] \to f([0, a])$ este bijectivă şi $f_a \circ g_a = \mathrm{id}_{f([0,a])}$ Rezultă $g_a = f_a^{-1}$. Atunci g_a este continuă, ca inversa funcţiei continue f_a. Deducem că g este continuă. **6p**

2) Reciproc, presupunem că funcţia g este continuă.
Întrucât f este continuă şi neconstantă pe $[0, 1]$, există $\alpha, \beta \in [0, 1]$, cu $f(\alpha) < f(\beta)$ astfel încât $\mathrm{Im}(f) = [f(\alpha), f(\beta)]$ (conform Teoremei lui Weierstrass şi proprietăţii lui Darboux)......... **3p**
Similar, cum g este presupusă continuă, $g(\mathrm{Im}(f)) = [b, a]$, cu $0 \leq b < a \leq 1$. (Cazul $a = b$ este exclus, deoarece f este neconstantă.) Cum $g(f(0)) = 0$, rezultă că $0 \in \mathrm{Im}(g) = [b, a]$, deci $b = 0$. Astfel, $\mathrm{Im}(g) = [0, a]$, cu $0 < a \leq 1$, iar $\mathrm{Im}(f) = f([0, a])$.................................. **3p**
Din (1) rezultă că g este injectivă. Cum g este continuă, deducem că g este strict monotonă. Atunci funcţia $g_a : \mathrm{Im}(f) \to [0, a]$, definită prin $g_a(y) = g(y),\ \forall\, y \in \mathrm{Im}(f)$, este bijectivă.... **3p**
Conform (1), funcţia $f_a : [0, a] \to f([0, a])$, definită prin $f_a(x) = f(x),\ \forall\, x \in [0, a]$, este inversa funcţiei g_a. Cum inversa unei funcţii strict monotone este tot o funcţie strict monotonă, funcţia f_a este strict monotonă. Rezultă că f este strict monotonă pe $[0, a]$. **3p**