Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

CLASA a X-a – soluţii

Punctaj din oficiu .... **10 p**

Problema 1. Se consideră numerele reale $a, b, x, y > 0$, cu $ab \neq 1$, şi c un număr natural nenul astfel încât

$$\log_a \sqrt{x} = \log_b \sqrt{cx+y} = \log_{ab} y.$$

a) Arătaţi că dacă $c = 1$, atunci numărul $\dfrac{y}{x}$ este iraţional.

b) Demonstrați că numărul $\dfrac{y}{x}$ este rațional dacă şi numai dacă c este produsul a două numere naturale nenule consecutive.

Soluţie. Egalităţile din enunţ conduc la:

$$\frac{1}{2}\log_a x = \frac{1}{2}\log_b (cx+y) = \log_{ab} y.$$

.... **1.5p**

Fie $z = \frac{1}{2}\log_a x = \frac{1}{2}\log_b (cx+y) = \log_{ab} y$. **3p**

De aici obţinem:

$$x = a^{2z}, \quad cx + y = b^{2z}, \quad y = (ab)^z.$$

.... **3p**

De aici obţinem că $\frac{y}{x} = \left(\frac{b}{a}\right)^z$ şi $c + \frac{y}{x} = \left(\frac{b}{a}\right)^{2z}$. **3p**

Notând $t = \frac{y}{x}$, obţinem că acesta este soluţia pozitivă a ecuaţiei $t^2 - t - c = 0$.
.... **3p**

De aici obţinem că $\frac{y}{x} = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$. **3p**

a) Pentru $c = 1$ avem $\frac{y}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, care este iraţional. **3p**

b) $\frac{y}{x} = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{1+4c} \in \mathbb{Q}$, iar cum $c \in \mathbb{N}^*$, avem $\sqrt{1+4c} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow 1+4c = (2d+1)^2$ $\Leftrightarrow c = d(d+1)$, cu $d \in \mathbb{N}^*$. **3p**

Problema 2. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ care satisfac simultan condiţiile

(1) $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$, pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$;

(2) $\overline{f(z)} = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$, pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$;

(3) $\overline{z}\, f(z) \in (0, \infty)$, pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$.

Soluţie: Din condiţia (1) pentru $z_1 = z_2 = 1$ obţinem $f(1) = f^2(1)$. **1.5p**
Deoarece $1 \cdot f(1) > 0$, obţinem că $f(1) = 1$. **3p**
Apoi, pentru $z_1 = z$ şi $z_2 = \frac{1}{z}$ avem $1 = f(1) = f(z)f\left(\frac{1}{z}\right)$, pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$. **3p**
Atunci, din condiţia (2), avem $\overline{f(z)} = \frac{1}{f(z)}$, pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$, ... **3p**
iar din condiţia(3) avem $\overline{z}\, f(z) = z\,\overline{f(z)} = \frac{z}{f(z)}$, pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$. **3p**
Deci avem $(f(z))^2 = \frac{z}{\overline{z}} = \frac{z^2}{|z|^2}$, adică

$$f(z) \in \left\{\pm \frac{z}{|z|}\right\}, \qquad \text{pentru orice } z \in \mathbb{C}^*.$$

.... **3p**
Cum $\overline{z}\, f(z) > 0$, obţinem

$$f(z) = \frac{z}{|z|}, \qquad \text{pentru orice } z \in \mathbb{C}^*,$$

.... **3p**
funcţie care verifică condiţiile date. **3p**

Notă: Lipsa verificării soluţiei sau măcar a menţionării că funcţia $f(z) = \frac{z}{|z|}$ verifică conduce la neacordarea ultimelor **3 puncte** din barem.

Problema 3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2 + 5 \cdot 6^x = 3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x$.

Soluţie. Vom demonstra că soluţiile sunt $x_1 = 0$ şi $x_2 = -1$. **3p**
Rescriem ecuaţia din enunţ astfel:

$$5 \cdot (6^x - 3^x - 2^x + 1) + 2(2^x - 1) + 3^x - 1 = 0,$$

.... **1.5p**
care poate fi factorizată astfel:

$$5(3^x - 1)(2^x - 1) + 2(2^x - 1) + 3^x - 1 = 0.$$

.... **3p**
Observăm că $x_1 = 0$ este soluţie şi că pentru $x > 0$ avem

$$5(3^x - 1)(2^x - 1) + 2(2^x - 1) + 3^x - 1 > 0,$$

deci ecuaţia nu poate avea soluţii în $(0, \infty)$. **3p**
Pentru $x < 0$ putem rescrie ecuaţia sub forma:

$$5 = \frac{2}{1 - 3^x} + \frac{1}{1 - 2^x}.$$

.... **3p**
Funcţia $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{1-3^x} + \frac{1}{1-2^x}$ este strict crescătoare pe $(-\infty, 0)$.
.... **3p**
Deoarece funcţia f este strict crescătoare, ecuaţia admite cel mult o soluţie pe $(-\infty, 0)$.

.... **3p**

Deoarece $x_2 = -1$ verifică ecuaţia dată, aceasta este singura soluţie din intervalul $(-\infty, 0)$.

.... **3p**

Problema 4. Pentru orice mulţime finită $A = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ de numere complexe nenule cu $n \geq 4$ elemente definim mulţimea:

$$B(A) = \left\{ z_i z_j \;\middle|\; 1 \leq i < j \leq n \right\}.$$

Determinați mulțimile A pentru care $A = B(A)$.

Soluţie. Vom demonstra că mulțimile căutate sunt mulțimile rădăcinilor de ordinul n ale unității, i.e., $A = U_n$. **1.5p**

Fără a pierde generalitatea presupunem că $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \cdots \leq |z_n|$.

Deoarece $z_n z_k \in A$, avem $|z_n z_k| \leq |z_n|$, adică $|z_k| \leq 1$, pentru $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Deoarece $z_1 z_k \in A$, avem $|z_1 z_k| \geq |z_1|$, adică $|z_k| \geq 1$, pentru $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Aşadar, $|z_k| = 1$, pentru $k \in \{2, \ldots, n-1\}$. **3p**

Dacă $|z_n| > 1$, atunci $|z_k z_n| > 1$, pentru orice $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, deci $z_k z_n = z_n$ (toate celelalte elemente din A având modulul cel mult 1), adică $z_k = 1$, pentru $k \in \{2, \ldots, n-1\}$. Dar, cum $n \geq 4$, acest lucru este imposibil, deoarece $z_i \neq z_j$ pentru $i \neq j$. Aşadar, $|z_n| = 1$.

.... **3p**

În mod analog, obţinem că $|z_1| = 1$, deci toate elementele din A au modulul egal cu 1.

.... **3p**

Fie $\theta_k = \arg(z_k)$. Fără a pierde generalitatea, presupunem că $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n < 2\pi$. Problema este echivalentă acum cu: pentru orice $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, există $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $\theta_i + \theta_j = \theta_k$ modulo 2π. Avem $\theta_n \leq \theta_n + \theta_1 < 2\pi + \theta_1$, deci $\theta_n = \theta_n + \theta_1$, adică $\theta_1 = 0$, deci $1 \in A$. **3p**

În plus, $\theta_n < \theta_n + \theta_2 < 2\pi + \theta_2$, deci $\theta_n + \theta_2 = 2\pi + \theta_1 = 2\pi$, adică $\theta_n = 2\pi - \theta_2$. Apoi avem

$$\theta_3 < \theta_3 + \theta_2 < \theta_4 + \theta_2 < \cdots < \theta_n + \theta_2 = 2\pi,$$

deci avem $n-2$ argumente cuprinse între θ_3 şi 2π, deci $\theta_k + \theta_2 = \theta_{k+1}$, pentru $k \in \{3, \ldots, n-1\}$.

.... **3p**

Mai întâi avem $\theta_n = (n-3)\theta_2 + \theta_3$, iar din $\theta_2 + \theta_n = 2\pi$, avem $(n-2)\theta_2 + \theta_3 = 2\pi$ (1).

Pe de altă parte, $2\pi = 2\pi + \theta_1 = \theta_n + \theta_2 < \theta_n + \theta_3 < 2\pi + \theta_3$, deci $\theta_n + \theta_3 = 2\pi + \theta_2$, adică $2\theta_3 + (n-4)\theta_2 = 2\pi$ (2).

Din (1) şi (2) avem $\theta_3 = 2\theta_2$, deci $\theta_k = (k-1)\theta_2$, iar cum $\theta_2 + \theta_n = 2\pi$, avem $\theta_k = \frac{2(k-1)\pi}{n}$, $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$, adică $A = U_n$. **3p**

Mai trebuie demonstrat că toate aceste mulțimi verifică egalitatea din enunț. Fie $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, elementele lui A. Pe de-o parte, produsul a două rădăcini de ordinul n ale unității este rădăcină de ordinul n a unității. Apoi avem $\varepsilon_k = \varepsilon_k \cdot \varepsilon_0$, pentru $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, respectiv $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 \varepsilon_{n-1}$, ceea ce încheie demonstrația.

.... **3p**

Notă 1: Pentru simpla menţionare a soluţiei $A = U_n$ se acordă **1.5 puncte**.

Notă 2: Pentru menţionarea soluţiei $A = U_n$ şi verificarea acesteia, fără alte considerente, se acordă **4.5 puncte**.