Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2025

CLASA a VIII-a – soluții

Problema 1. Fie mulțimile

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ și } x + y + 1 = 0\}, \quad B = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ și } x^3 + y^3 + 1 = 3xy\}.$$

a) Arătați că $A \subset B$.
b) Arătați că mulțimea $B \setminus A$ are exact un element.

Soluție. a) Dacă $(x, y) \in A$, atunci $y = -x - 1$ **2p**

Reiese $x^3 + y^3 + 1 = x^3 - (x + 1)^3 + 1 = 3x(-x - 1) = 3xy$, deci $(x, y) \in B$ **2p**

b) Dacă $(x, y) \in B$, atunci $x^3 + y^3 - 3xy + 1 = 0$, deci $(x + y)^3 - 3xy(x + y) - 3xy + 1 = 0$, sau $(x+y+1)((x+y)^2 - (x+y) + 1) - 3xy(x+y+1) = 0$, sau $(x+y+1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1) = 0$.

Pentru ca $(x, y) \in B \setminus A$ trebuie ca $x^2 - xy + y^2 - x - y + 1 = 0$, de unde $(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0$, adică $x = y = 1$. Cum $(1, 1) \notin A$, reiese $B \setminus A = \{(1, 1)\}$ **3p**

Variantă pentru b). Observăm că $(1, 1) \in B \setminus A$ **1p**

Fie $(x, y) \in B$, $x = 1 + a$, $y = 1 + b$. Atunci $a^3 + b^3 + 3a^2 + 3b^2 - 3ab = 0$, sau $(a + b)(a^2 - ab + b^2) + 3(a^2 - ab + b^2) = 0$, deci $(a + b + 3)(a^2 - ab + b^2) = 0$. Dacă $a + b + 3 = 0$, atunci $x + y + 1 = 0$ și $(x, y) \in A$. Dacă $a^2 - ab + b^2 = 0$, atunci $a = b = 0$ și $(x, y) \in B \setminus A$. Astfel $B \setminus A$ conține doar elementul $(1, 1)$ **2p**

Altă soluție. Se știe că $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$. Reiese $x^3 + y^3 + 1 - 3xy = (x + y + 1)(x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y)$ **4p**

Astfel, dacă $(x, y) \in A$, atunci $(x, y) \in B$ **1p**

Apoi, dacă $(x, y) \in B \setminus A$, atunci $x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y = 0$ și finalizăm ca la prima soluție **2p**

Problema 2. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $x^2 + y^2 + xy(x - y) = 17$.

Gazeta Matematică

Soluție. Ecuația se scrie $(x - y)^2 + 2xy + xy(x - y) = 17$ **2p**

Notăm $x - y = d \in \mathbb{Z}$, $xy = p \in \mathbb{N}$. Atunci egalitatea devine $p(d + 2) = 17 - d^2$, de unde $p = \dfrac{17 - d^2}{d + 2}$ **2p**

Obținem $p = \dfrac{13}{d + 2} + 2 - d \in \mathbb{N}$. Rezultă $d + 2 \in \{1, -1, 13, -13\}$, adică $d \in \{-1, -3, 11, -15\}$. Dacă $d = -1$, atunci $p = 16$, caz în care nu avem soluții, deoarece nu există două numere naturale cu produsul 16 și diferența -1. Din $d = -3$ rezultă $p = -8 < 0$, care nu convine. Pentru $d = 11$, $p = -8 < 0$, nu convine. Dacă $d = x - y = -15$, atunci $p = xy = 16$, de unde obținem soluția (unică) $x = 1$, $y = 16$ **3p**

Altă soluție. Ecuația se scrie $(x-y)^2+2xy+xy(x-y)=17$ **2p**

Formăm o diferență de pătrate: $4(x-y)^2+4xy(x-y)+(xy)^2-(xy)^2+8xy-16=68-16$, adică $(2(x-y)+xy)^2-(xy-4)^2=52$. Reiese $(2x-2y+xy-xy+4)(2x-2y+xy+xy-4)=52$, de unde $(x-y+2)(x-y+xy-2)=13$ **2p**

Cum numerele x, y, z sunt naturale, sunt posibile cazurile

• $x-y+2=-13$ și $x-y+xy-2=-1$, deci $x-y=-15$, iar $xy=16$, de unde $y=x+15$ și $x(x+15)=16$. Cum x este natural, deducem că $x=1$, apoi $y=16$;

• $x-y+2=-1$ și $x-y+xy-2=-13$, deci $x-y=-3$, iar $xy=-8$, imposibil dacă x și y sunt naturale;

• $x-y+2=1$ și $x-y+xy-2=13$, deci $x-y=-1$ și $xy=16$, imposibil dacă x și y sunt naturale;

• $x-y+2=13$ și $x-y+xy-2=1$, deci $x-y=11$, iar $xy=-8$, imposibil dacă x și y sunt naturale **3p**

Problema 3. Numerele reale strict pozitive x,y,z verifică relațiile $xy+4\leqslant 2(x+z)$, $yz+4\leqslant 2(y+x)$, $zx+4\leqslant 2(z+y)$. Demonstrați că $x=y=z$.

Soluție. Ipoteza este $x(y-2)\leqslant 2(z-2)$, $y(z-2)\leqslant 2(x-2)$, $z(x-2)\leqslant 2(y-2)$ **2p**

Dacă $x-2<0$, folosind relația a doua rezultă $z-2<0$, apoi din prima obținem $y-2<0$, deci $x,y,z\in(0,2)$ și $xyz<8$. Avem $x(2-y)\geqslant 2(2-z)>0$, $y(2-z)\geqslant 2(2-x)>0$, $z(2-x)\geqslant 2(2-y)>0$. Înmulțind inegalitățile membru cu membru și împărțind la $(2-x)(2-y)(2-z)>0$, rezultă $xyz\geqslant 8$, contradicție cu $xyz<8$ **2p**

Analog obținem că dacă $x>2$, atunci $y>2$ și $z>2$, deci $xyz>8$. Înmulțind relațiile ajungem apoi la $xyz\leqslant 8$ – contradicție **2p**

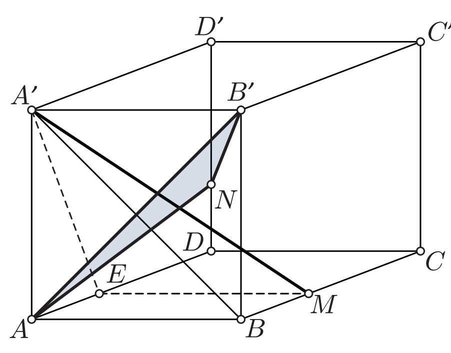
Așadar $x=2$. Înlocuind în condițiile date obținem $y\leqslant z\leqslant 2\leqslant y$, deci $x=y=z=2$... **1p**

Altă soluție. Avem $ab+4-2(a+b)=(a-2)(b-2)$, (1) **2p**

Presupunem că unul dintre numere este mai mic decât 2, de exemplu $x<2$. Atunci $yz+4\leqslant 2(y+x)<2y+4$, deci $z<2$. Reiese $xy+4\leqslant 2(x+z)<2x+4$, deci $y<2$. Din (1) obținem $xy+4>2(x+y)$ și analoagele, deci $\sum xy+12>4\sum x$, în contradicție cu ipoteza **3p**

Așadar $x,y,z\geqslant 2$. Din (1) reiese $xy+4\geqslant 2(x+y)$ și analoagele. Prin adunare obținem $\sum xy+12\geqslant 4\sum x$. Coroborând aceasta cu ipoteza deducem că toate inegalitățile trebuie să fie egalități, deci $x=y=z=2$ **2p**

Problema 4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Pe segmentele BC și DD' luăm punctele M, respectiv N, astfel încât $BM=DN$. Arătați că dreapta $A'M$ este perpendiculară pe planul $(AB'N)$.



Soluție. Din $BC\perp(ABB')$ și $AB'\subset(ABB')$ obținem $AB'\perp BC$. Cum $AB'\perp A'B$ (diagonale ale pătratului $ABB'A'$), reiese $AB'\perp(A'BC)$. Deoarece $A'M\subset(A'BC)$, obținem $A'M\perp AB'$, (1) **3p**

Fie $E\in(AD)$ astfel ca $AE=BM$. Atunci $ABME$ este dreptunghi, deci $AB\parallel ME$. Cum $AB\perp(ADA')$ și $AN\subset(ADA')$, rezultă $AN\perp ME$, (2) **2p**

Din $\triangle A'AE\equiv\triangle ADN$ (C.C.) obținem $\sphericalangle DAN=\sphericalangle AA'E$, de unde $\sphericalangle AA'E+\sphericalangle A'AN=\sphericalangle DAN+\sphericalangle A'AN=90^\circ$. Astfel, $AN\perp A'E$. Folosind (2) obținem $AN\perp(A'EM)$, de unde $AN\perp A'M$. Aceasta, împreună cu (1), duce la $A'M\perp(AB'N)$ **2p**