MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2025

CLASA a VI-a - soluții

Problema 1. Fie numerele naturale a, b, c pentru care numerele $m = \dfrac{5a+6b+7c+6}{4a+3b+2c+3}$ și $n = \dfrac{a+2b+3c+5}{3a+b+2c+5}$ sunt simultan numere naturale.

a) Arătați că $m \geqslant 2$.

b) Determinați numerele m și n.

Soluție. a) Dacă $m \leqslant 1$, atunci $5a+6b+7c+6 \leqslant 4a+3b+2c+3$, adică $a+3b+5c+3 \leqslant 0$, ceea ce nu se poate. Deci $m \geqslant 2$ **2p**

b) Nu putem avea $n \geqslant 2$, deoarece ar rezulta $a+2b+3c+5 \geqslant 6a+2b+4c+10$, deci $0 \geqslant 5a+c+5$, fals. Cum $n > 0$, obținem $n = 1$ **1p**

Din $n = 1$ obținem $a+2b+3c+5 = 3a+b+2c+5$, deci $b+c = 2a$. **1p**

Dacă, prin absurd, $m \geqslant 3$, ar rezulta $5a+6b+7c+6 \geqslant 12a+9b+6c+9$, de unde $c \geqslant 7a+3b+3$. Adunând b în ambii membri, obținem $b+c \geqslant 7a+4b+3$, adică $2a \geqslant 7a+4b+3$, deci $0 \geqslant 5a+4b+3$, fals. Așadar, $m < 3$, de unde, având în vedere punctul a), obținem $m = 2$ **2p**

Din $m = 2$ rezultă $5a+6b+7c+6 = 8a+6b+4c+6$, adică $c = a$ și cum $b+c = 2a$, deducem $a = b = c$. Așadar, $m = 2$ și $n = 1$, valori care se obțin pentru $a = b = c$. .. **1p**

Problema 2. Aflați numerele naturale nenule a și b pentru care

$$\frac{a}{(a,b)} = b + \frac{48 \cdot (a,b)}{[a,b]} \quad \text{și} \quad \frac{b}{(a,b)} = a - \frac{312 \cdot (a,b)}{[a,b]}.$$

Am notat cu (a,b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b, iar cu $[a,b]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b.

Gazeta Matematică

Soluție. Observăm că $a \geqslant \dfrac{a}{(a,b)} > b$........ **1p**

Notăm cu $d = (a,b)$. Atunci $a = dx, b = dy, [a,b] = dxy$ cu $(x,y) = 1, x > y$. Obținem $x = dy + \dfrac{48}{xy}$ și $y = dx - \dfrac{312}{xy}$, (1).

Așadar, $xy \,|\, 48$ și $xy \,|\, 312 \Rightarrow xy \mid (48, 312) = 24$........ **2p**

Continuarea 1.

Tot din (1) rezultă $xy(x-dy) = 48$ și $xy(dx-y) = 312 \Rightarrow \dfrac{x-dy}{dx-y} = \dfrac{48}{312} = \dfrac{2}{13} \Rightarrow$ $x(13-2d) = y(13d-2) \Rightarrow 13-2d > 0$........ **1p**

Avem de analizat cazurile: I. $d = 1 \Rightarrow 11x = 11y \Rightarrow a = b$, fals, deoarece $a > b$.
II. $d = 2 \Rightarrow 3x = 8y$. Cum $(x, y) = 1$, obținem $x = 8, y = 3$, deci $a = 16, b = 6$ **1p**
III. $d = 3 \Rightarrow 7x = 37y \Rightarrow x = 37, y = 7$, fals, deoarece $xy \,|\, 24$.
IV. $d = 4 \Rightarrow x = 10y \Rightarrow x = 10, y = 1$, fals, deoarece $xy \,|\, 24$.
V. $d = 5 \Rightarrow x = 21y \Rightarrow x = 21, y = 1$, fals, deoarece $xy \,|\, 24$.
VI. $d = 6 \Rightarrow x = 76y \Rightarrow x = 76, y = 1$, fals, deoarece $xy \,|\, 24$. **2p**

Continuarea 2.
Din $xy \mid 24$ rezultă că $xy \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, de unde rezultă (și se analizează) cazurile $(x, y) \in \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (6, 1), (3, 2), (8, 1), (12, 1), (4, 3), (24, 1), (8, 3)\}$.
Obținem $x = 8, y = 3$, care implică $d = 2$ și soluția unică $a = 16$, $b = 6$ **4p**

Problema 3. Fie ABC un triunghi isoscel cu $\sphericalangle BAC = 30^\circ$ și $AB = AC$. Considerăm punctul D pe latura AC și punctele distincte E, F, G pe latura AB astfel încât $BC = BD = DE = EF$, iar $DG = DF$.

a) Arătați că $BF = GE$.

b) Aflați măsura unghiului BCG.

Soluție.

a) $\triangle DFG$ isoscel $\Rightarrow \sphericalangle DFG = \sphericalangle DGF \Rightarrow \sphericalangle DFB = \sphericalangle DGE$ (1) **1p**
$\triangle BDE$ isoscel $\Rightarrow \sphericalangle DBF = \sphericalangle DEG$ (2) **1p**
Din (1),(2) și $BD = DE$, obținem $\triangle BDF \equiv \triangle EDG$ $(L.U.U.) \Rightarrow BF = GE$ ... **2p**

b) $\triangle ABC$ isoscel $\Rightarrow \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \dfrac{180^\circ - \sphericalangle BAC}{2} = \dfrac{150^\circ}{2} = 75^\circ$ **1p**
$BF = GE \Rightarrow BG = FE = BC \Rightarrow \triangle BCG$ isoscel **1p**
Deci $\sphericalangle BCG = \sphericalangle BGC = \dfrac{180^\circ - \sphericalangle CBG}{2} = \dfrac{105^\circ}{2} = 52^\circ 30'$ **1p**

Problema 4. Determinați numerele naturale $n \geqslant 2$ cu proprietatea că n este divizibil cu fiecare dintre numerele

$$d_1,\ d_1 + d_2,\ \ldots,\ d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1},$$

unde $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{k-1} < d_k = n$ sunt toți divizorii naturali ai lui n.

Soluție. Numerele prime au proprietatea din enunț, deoarece, dacă n este număr prim, divizorii săi sunt $1 = d_1 < d_2 = n$, iar n este divizibil cu d_1 .... **1p**

Fie n un număr compus, având $k \geqslant 3$ divizori, cu proprietatea din enunț.

Presupunând că n este număr impar, toți cei k divizori ai săi sunt numere impare. Din ipoteză, n este divizibil cu $d_1 + d_2$, care este număr par, deci n ar trebui să fie tot număr par, contradicție. Așadar, n este număr par. **2p**

Atunci $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, deci n este divizibil și cu $d_1 + d_2 = 3$, deci $d_3 = 3$. În plus, deducem că $6 \mid n$ **1p**

Deoarece, pentru orice divizor d al lui n, numărul $\frac{n}{d}$ este de asemenea un divizor al lui n, deducem că $\frac{n}{6}$, $\frac{n}{3}$ și $\frac{n}{2}$ se află printre cei k divizori ai lui n. **1p**

Cum n este divizibil cu $d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1}$, rezultă că $n \geqslant d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1} \geqslant \frac{n}{6} + \frac{n}{3} + \frac{n}{2} = n$.

Deducem că singurii divizori ai lui n, mai mici decât n, sunt $\frac{n}{6}$, $\frac{n}{3}$ și $\frac{n}{2}$, deci $\frac{n}{6} = d_1 = 1$, $\frac{n}{3} = d_2 = 2$ și $\frac{n}{2} = d_3 = 3$, deci $n = 6$ este singurul număr compus cu proprietatea din enunț **2p**