Ministerul Educației și Cercetării

Societatea de Științe Matematice din România

**Olimpiada Naţională de Matematică**

**Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2025**

**CLASA a XII-a – soluţii**

**Problema 1.** Fie $(G,\cdot)$ un grup, cu elementul neutru $e$, iar $A$ o submulţime nevidă a sa. Notăm cu $AA=\{xy|\, x,y\in A\}$.
a) Arătaţi că dacă $G$ este finit, atunci $AA=A$ dacă şi numai dacă $e\in A$ şi $|AA|=|A|$.
b) Daţi un exemplu de grup $G$ şi o submulţime $A\subseteq G$, cu $AA\neq A$, $|AA|=|A|$ şi $AA<G$.
(Notaţia $H<G$ înseamnă că $H$ este un subgrup propriu al grupului $G$, adică un subgrup al lui $G$ diferit de grupul $G$.)

*Gazeta Matematică*

**Soluţie.**
a) Dacă $AA=A$, atunci $|AA|=|A|$. Pentru orice $x\in A$ avem că $|xA|=|A|<\infty$ şi $xA\subseteq AA=A$, astfel că $xA=A$. Dar atunci $x\in xA$, astfel că $e=x^{-1}\cdot x\in x^{-1}\cdot xA=A$.
........................................................................................ **2p**
Reciproc, dacă $e\in A$ şi $|AA|=|A|$, avem că $A=e\cdot A\subseteq AA$ şi cum $|A|=|AA|<\infty$, rezultă că $AA=A$. ........................................................................ **2p**
b) Fie $G=U_4=\{1,i,-1,-i\}$ grupul rădăcinilor de ordinul 4 ale unităţii. Considerând $A=\{i,-i\}$, avem că $AA=\{i^2, i\cdot(-i), (-i)^2\}=\{1,-1\}=U_2<U_4$, $|AA|=2=|A|$ şi $AA\neq A$ (mai mult, $AA\cap A=\emptyset$). ........................................................ **3p.**

**Problema 2.** Fie $(G,\cdot)$ un grup, iar $H<G$ un subgrup propriu al lui $G$. Dacă există morfisme $f,g,h: G\longrightarrow G$ ale grupului $G$, cu proprietatea că $f(xy)=g(x)h(y)$ pentru orice $x,y\in G\setminus H$, arătaţi că:
a) $g=h$;
b) dacă $G$ este neabelian, iar $H=Z(G)$, atunci $f=g=h$.
(Mulţimea $Z(G)=\{c\in G|\, cx=xc,\ \forall x\in G\}$ se numeşte centrul grupului $G$.)

**Soluţie.**
a) Notând cu $e$ elementul neutru al grupului $G$, pentru orice $x\in G\setminus H$ avem că $x^{-1}\in G\setminus H$, astfel că
$$e=f(e)=f(x\cdot x^{-1})=g(x)\cdot h(x^{-1})=g(x)\cdot h(x)^{-1},$$
de unde rezultă că $g(x)=h(x)$ pentru orice $x\in G\setminus H$. ..................................... **2p**
Pentru orice $a\in H$, alegând un $x\in G\setminus H$ avem că $ax, x^{-1}\in G\setminus H$, astfel că:
$$g(a)=g(ax\cdot x^{-1})=g(ax)\cdot g(x^{-1})=h(ax)\cdot h(x^{-1})=h(ax\cdot x^{-1})=h(a).$$
Rezultă deci că $g=h$. ............................................................................ **2p**
b) Fie $G$ neabelian şi $H=Z(G)$. Ţinând cont de punctul anterior avem că $g=h$, astfel că relaţia din enunţ devine
$$f(xy)=g(x)g(y)=g(xy)\qquad \text{pentru orice } x,y\in G\setminus Z(G).$$

Pentru orice $a \in Z(G)$ şi $x \in G \setminus Z(G)$, avem $ax, x^{-1} \in G \setminus Z(G)$, astfel că:

$$f(a) = f(ax \cdot x^{-1}) = g(ax \cdot x^{-1}) = g(a).$$

................................................................................... **1p**

Fie $x \in G \setminus Z(G)$. Atunci există $y \in G \setminus Z(G)$ cu proprietatea că $xy \neq yx$. Dacă $xy \in Z(G)$ atunci am avea

$$xy = y(xy)y^{-1} = yx \neq xy,$$

ceea ce reprezintă o contradicţie. Prin urmare, $xy \in G \setminus Z(G)$, şi, cum $y^{-1} \in G \setminus Z(G)$, avem:

$$f(x) = f(xy \cdot y^{-1}) = g(xy \cdot y^{-1}) = g(x).$$

Rezultă că $f = g$ şi deci $f = g = h$. ........................................................ **2p**

**Problema 3.** a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ două numere reale, cu $a < b$, iar $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie strict monotonă cu proprietatea că $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Arătaţi că $f(a) \cdot f(b) < 0$.

b) Determinaţi şirurile convergente $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale, pentru care există o funcţie strict monotonă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx\,, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

**Soluţie**.

a) Dacă $f([a, b]) \subseteq [0, \infty)$ sau $f([a, b]) \subseteq (-\infty, 0]$, atunci $m = \left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| > 0$, iar pe unul dintre intervalele $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ sau $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ are loc inegalitatea $|f(x)| > m$ pentru orice $x$ din acel interval. Atunci

$$0 = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|\,dx \geq m \cdot \frac{b-a}{2} > 0\,,$$

ceea ce este imposibil. Rezultă că $f(a) \cdot f(b) < 0$. ........................................ **1p**

b) Vom arăta că singurele şiruri de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ care verifică condiţia din enunţ sunt şirurile constante şi şirurile care iau exact două valori reale distincte şi care devin staţionare începând cu un anumit rang.

În mod evident, dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir constant, cu $a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$, atunci şirul este convergent, cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ şi $\displaystyle\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx = 0$ pentru orice $k \geq 1$ şi orice funcţie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Dacă $\{a_n | n \geq 1\} = \{a, b\}$ şi există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ cu $a_n = a$ pentru orice $n \geq n_0$, atunci $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent, cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, şi există funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 2x - a - b$, care este strict monotonă şi verifică egalităţile $\displaystyle\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx = 0$ pentru orice $k \geq 1$.

................................................................................... **1p**

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir convergent de numere reale pentru care există o funcţie strict monotonă $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx = \int_{a_2}^{a_3} f(x)\,dx = \ldots = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx = \ldots .$$

Fie $I = \int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx$ pentru orice $k\geq 1$ şi $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Pentru un $r>0$ fixat există atunci un rang $n_r\geq 1$, astfel încât $a_n\in(a-r,a+r)$ pentru orice $n\geq n_r$. Cum $f$ este strict monotonă, dacă $M=\max(|f(a-r)|,|f(a+r)|)$, atunci $|f(x)|<M$ pentru orice $x\in(a-r,a+r)$. Pentru orice $p\in\mathbb{N}^*$ avem:

$$p\cdot|I| = |p\cdot I| = \left|\sum_{k=1}^{p}\int_{a_{n_r+k-1}}^{a_{n_r+k}} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{a_{n_r}}^{a_{n_r+p}} f(x)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{a_{n_r}}^{a_{n_r+p}} |f(x)|\,dx\right| < \int_{a-r}^{a+r} |f(x)|\,dx \leq 2r\cdot M.$$

Rezultă că $0\leq |I| < \dfrac{2Mr}{p}$, oricare ar fi $p\in\mathbb{N}^*$, astfel că $I=0$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2p**
Arătăm că $card(\{a_n|n\in\mathbb{N}^*\})\leq 2$. Presupunând contrariul, ar exista $i,j,k\in\mathbb{N}^*$, cu $i<j<k$ astfel încât $a_i\neq a_j\neq a_k\neq a_i$. Avem că

$$\int_{a_i}^{a_j} f(x)\,dx = \sum_{l=i}^{j-1}\int_{a_l}^{a_{l+1}} f(x)\,dx = (j-i)\cdot I = 0$$

şi, de asemenea, $\int_{a_j}^{a_k} f(x)\,dx = (k-j)\cdot I = 0$, respectiv $\int_{a_i}^{a_k} f(x)\,dx = 0$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**
Funcţia $f$ fiind strict monotonă, rezultă atunci că
$f(a_i)\cdot f(a_j)<0$, $f(a_i)\cdot f(a_k)<0$ şi $f(a_j)\cdot f(a_k)<0$. Dar atunci

$$(f(a_i)\cdot f(a_j)\cdot f(a_k))^2 = (f(a_i)\cdot f(a_j))\cdot(f(a_i)\cdot f(a_k))\cdot(f(a_j)\cdot f(a_k)) < 0\,,$$

ceea ce este absurd. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**
Contradicţia obţinută arată că presupunerea făcută este falsă, astfel că $card(\{a_n|\,n\in\mathbb{N}^*\})\leq 2$. Convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ implică în plus, în cazul în care şirul nu este constant, că el este staţionar începând cu un anumit rang. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1p**

**Problema 4.** Fie $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie continuă. Definim funcţia $\tilde{f}:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ prin

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\cdot\int\limits_0^x f(t)\,dt & ,\ \text{dacă } x>0,\\ f(0) & ,\ \text{dacă } x=0.\end{cases}$$

Arătaţi că:
a) funcţia $\tilde{f}$ este continuă în 0 şi derivabilă pe $(0, 1]$;
b) are loc egalitatea

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx = \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 + \int_0^1 \left(f(x) - \tilde{f}(x)\right)^2\,dx.$$

**Soluţie**.
a) Funcţia $f$ fiind continuă pe $[0, 1]$, rezultă că funcţia $F : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ este derivabilă pe $[0, 1]$, cu $F' = f$. Rezultă atunci că funcţia $\tilde{f}$ este derivabilă pe $(0, 1]$, ca produs de funcţii derivabile.
.................................................................................... **1p**
Rămâne să mai arătăm doar că $\tilde{f}$ este continuă în 0. Cum $f$ este continuă, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, astfel că, aplicând regula lui l'Hôspital, avem:

$$\lim_{x\to 0} \tilde{f}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{x'} = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \tilde{f}(0)\,,$$

şi rezultă că $\tilde{f}$ este continuă în 0. .................................................. **1p**
b) Fie $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$. Atunci $\tilde{f}(1) = I$. Ţinând cont de a), funcţia $G : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $G(x) = x \cdot \left(\tilde{f}(x) - I\right)^2$ este continuă în 0 şi derivabilă pe $(0, 1]$. În plus avem
$G(0) = 0 = G(1)$, .................................................................. **1p**
respectiv

$$G'(x) = \left(\tilde{f}(x) - I\right)^2 + 2x \cdot \left(\tilde{f}(x) - I\right) \cdot \tilde{f}'(x) =$$

$$= \left(\tilde{f}(x) - I\right) \cdot \left(\tilde{f}(x) - I + 2x \cdot \left(\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x} \cdot f(x)\right)\right) =$$

$$= \left(\tilde{f}(x) - I\right) \cdot \left(2f(x) - \tilde{f}(x) - I\right) = 2f(x) \cdot \left(\tilde{f}(x) - I\right) + I^2 - \tilde{f}^2(x) =$$

$$= I^2 - 2If(x) + f^2(x) - \left(f(x) - \tilde{f}(x)\right)^2, \qquad \text{pentru orice } x \in (0, 1].$$

.................................................................................... **2p**
Deoarece există $\lim\limits_{x\to 0} G'(x) = (I - f(0))^2 \in \mathbb{R}$, rezultă că $G$ este derivabilă în 0,
cu $G'(0) = (I - f(0))^2$, şi $G'$ este continuă pe $[0, 1]$. Obţinem atunci:

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx - \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 - \int_0^1 \left(f(x) - \tilde{f}(x)\right)^2\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(f^2(x) + I^2 - 2If(x) - \left(f(x) - \tilde{f}(x)\right)^2\right)\,dx =$$

$$= \int_0^1 G'(x)\,dx = G(1) - G(0) = 0\,,$$

ceea ce demonstrează relaţia cerută. ........................................................ **2p**