Testul 1

Problema 1. Fie k un număr întreg, $k \geq 2$. Determinaţi numerele naturale nenule n_1, n_2, …, n_k, care îndeplinesc simultan următoarele condiţii:

$$n_2 \mid 2^{n_1} - 1, \quad n_3 \mid 2^{n_2} - 1, \quad \ldots, \quad n_k \mid 2^{n_{k-1}} - 1, \quad n_1 \mid 2^{n_k} - 1.$$

Problema 2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi fie D, E, F picioarele înălţimilor din A, B, respectiv C. Dreptele BC şi EF se intersectează în punctul P, iar paralela prin D la dreapta EF intersectează drepta AC, respectiv AB, în punctul Q, respectiv R. Arătaţi că cercul PQR trece prin mijlocul laturii BC.

Problema 3. Fie a, b, c numere naturale nenule, astfel încât $a < b < c$, şi fie $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ funcţia definită prin $f(n) = n - a$, dacă $n > c$, şi $f(n) = f(f(n+b))$, dacă $n \leq c$. Determinaţi numărul de puncte fixe ale lui f.

Problema 4. Fie m şi n două numere naturale nenule şi fie A_1, …, A_m mulţimi de numere naturale nenule, astfel încât:

(1) A_i şi A_j sunt disjuncte, oricare ar fi indicii distincţi i şi j ;
(2) $|A_i| = n$, $i = 1, \ldots, m$;
(3) Oricare ar fi indicele i, niciun element din A_i nu este divizibil cu niciun element din A_{i+1}, unde indicii sunt consideraţi modulo m.

Determinaţi numărul maxim de perechi ordonate (a, b), unde a şi b sunt elemente din A_i-uri diferite şi b este divizibil cu a.

Testul 1 — Soluţii

Problema 1. Fie k un număr întreg, $k \geq 2$. Determinaţi numerele naturale nenule n_1, n_2, …, n_k, care îndeplinesc simultan următoarele condiţii:

$$n_2 \,|\, 2^{n_1} - 1, \quad n_3 \,|\, 2^{n_2} - 1, \quad \ldots, \quad n_k \,|\, 2^{n_{k-1}} - 1, \quad n_1 \,|\, 2^{n_k} - 1.$$

Soluţie. Vom arăta că singurele numere care îndeplinesc condiţiile din enunţ sunt $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 1$.

Pentru fiecare număr natural $r > 1$, notăm cu $m(r)$ cel mai mic factor prim al lui r. Arătăm că, dacă s şi t sunt numere naturale strict mai mari decât 1, astfel încât $s \,|\, 2^t - 1$, atunci $m(t) < m(s)$. Fie $p = m(s)$. Cum p este impar, rezultă că $p \,|\, 2^{p-1} - 1$. Cum $p \,|\, 2^t - 1$, rezultă că $p \,|\, 2^{\gcd(t,p-1)} - 1$. Dacă $\gcd(t, p-1) = 1$, rezultă că $p = 1$ — contradicţie. Deci $\gcd(t, p-1) > 1$. Prin urmare, t are un factor prim mai mic sau egal cu $p - 1$, deci $m(t) < p = m(s)$.

Presupunând că $n_1 > 1$, rezultă $n_k > 1$, $n_{k-1} > 1$, …, $n_2 > 1$, deci $m(n_1) < m(n_2) < \cdots < m(n_k) < m(n_1)$ — contradicţie. Prin urmare, $n_1 = 1$, de unde, $n_2 = 1$, apoi $n_3 = 1$, … şi, în fine, $n_k = 1$.

Problema 2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi fie D, E, F picioarele înălţimilor din A, B, respectiv C. Dreptele BC şi EF se intersectează în punctul P, iar paralela prin D la dreapta EF intersectează drepta AC, respectiv AB, în punctul Q, respectiv R. Arătaţi că cercul PQR trece prin mijlocul laturii BC.

Soluţie. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $AB > AC$. Fie M mijlocul laturii BC. Este suficient să arătăm că $DM \cdot DP = DQ \cdot DR$.

Întrucât dreptele BC şi EF sunt antiparalele, iar dreptele EF şi QR sunt paralele, $DB \cdot DC = DQ \cdot DR$, deci este suficient să arătăm că $DB \cdot DC = DM \cdot DP$, i. e., $BM^2 = DM \cdot MP$, deoarece $DB = BM + DM$, $DC = CM - DM = BM - DM$ şi $DP = MP - DM$. Întrucât $DM = MP - DP$, aceasta revine la $BM^2 = MP^2 - DP \cdot MP$, i. e., $DP \cdot MP = MP^2 - BM^2$.

Întrucât punctele D, E, F, M sunt concilcice, $PD \cdot PM = PE \cdot PF$. Punctele B, C, E, F sunt şi ele conciclice, deci $PE \cdot PF = PB \cdot PC$ şi, prin urmare, $DP \cdot MP = PB \cdot PC = (BM + MP)(MP - CM) = (MP + BM)(MP - BM) = MP^2 - BM^2$.

Problema 3. Fie a, b, c numere naturale nenule, astfel încât $a < b < c$, şi fie $f \colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ funcţia definită prin $f(n) = n - a$, dacă $n > c$, şi $f(n) = f(f(n+b))$, dacă $n \leq c$. Determinaţi numărul de puncte fixe ale lui f.

Soluţie. Arătăm recursiv că $f(n) = f(n + b - a)$, pentru $0 < n \leq c$.

Dacă $c - b < n \leq c$, atunci $n + b > c$, deci $f(n) = f(f(n + b)) = f(n + b - a)$.

Dacă $n \leq c - b$, atunci $n + b - a < n + b \leq c$, deci $f(n + b - a) = f(n + 2b - a)$.

Dacă $c - 2b < n \leq c - b$, atunci $c - b < n + b \leq c$, deci $f(n) = f(f(n+b)) = f(f(n+2b-a)) = f(n + b - a)$.

Presupunem că $f(n) = f(n + b - a)$, pentru $c - kb < n \leq c - (k-1)b$. Fie n, astfel încât $c - (k+1)b < n \leq c - kb$. Cum $c - kb < n + b \leq c - (k-1)b$, rezultă $f(n) = f(f(n + b)) = f(f(n+2b-a)) = f(n+b-a)$. Cum există un număr natural nenul m, astfel încât $c - mb < 0$, afirmaţia este demonstrată.

Fie $n \leq c$ şi fie $p = \lfloor (c-n)/(b-a) \rfloor$. Cum $n + p(b-a) \leq c$ şi $n + (p+1)(b-a) > c$, rezultă că $f(n) = f(n + b - a) = \cdots = f(n + p(b-a)) = f(n + (p+1)(b-a)) = n + (p+1)(b-a) + a$.

Atunci $f(n) = n$ dacă şi numai dacă $n \leq c$ şi $n + (p+1)(b-a) + a = n$, adică, dacă şi numai dacă $(p+1)(b-a) = a$.

Deci, dacă a nu este divizibil cu $b-a$, atunci f nu are puncte fixe. Dacă a este divizibil cu $b-a$, atunci n este punct fix al lui f dacă şi numai dacă $\lfloor (c-n)/(b-a) \rfloor + 1 = a/(b-a)$, adică, dacă şi numai dacă $c - a < n \leq c - 2a + b$, caz în care f are exact $b-a$ puncte fixe.

Problema 4. Fie m şi n două numere naturale nenule şi fie $A_1, \ldots, A_m$ mulţimi de numere naturale nenule, astfel încât:

(1) A_i şi A_j sunt disjuncte, oricare ar fi indicii distincţi i şi j;
(2) $|A_i| = n$, $i = 1, \ldots, m$;
(3) Oricare ar fi indicele i, niciun element din A_i nu este divizibil cu niciun element din A_{i+1}, unde indicii sunt consideraţi modulo m.

Determinaţi numărul maxim de perechi ordonate (a, b), unde a şi b sunt elemente din A_i-uri diferite şi b este divizibil cu a.

Soluţie. Maximumul cerut este $\binom{m-1}{2} n^2$ şi este atins, de exemplu, pentru

$$A_k = \{a^{(k-1)n+1}, a^{(k-1)n+2}, \ldots, a^{kn}\}, \quad k = 1, \ldots, m-1, \quad \text{şi} \quad A_m = \{b, b^2, \ldots, b^n\},$$

unde a şi b sunt numere naturale coprime, mai mari sau egale cu 2.

Numim pereche *bună* o pereche (a, b) care are proprietăţile cerute. Pentru fiecare m-tuplet $(a_1, \ldots, a_m)$, unde $a_k \in A_k$, $k = 1, \ldots, m$, fie $k(a_1, \ldots, a_m)$ numărul de perechi bune de forma (a_i, a_j). Vom arăta prin inducţie după m că $k(a_1, \ldots, a_m) \leq \binom{m-1}{2}$. Prin urmare, numărul de perechi bune, în care fiecare pereche bună este numărată de exact n^{m-2} ori, este cel mult $\binom{m-1}{2} n^m$, de unde, concluzia.

Cazul $m = 3$ se verifcă imediat. Pentru $m \geq 4$, fixăm un m-tuplet $(a_1, \ldots, a_m)$, $a_k \in A_k$, $k = 1, \ldots, m$; fără să restrângem generalitatea, putem presupune că a_1 este cea mai mare componentă a sa. Atunci $(m-1)$-tupletul $(a_1, \ldots, a_{m-1})$ satisface ipoteza de inducţie: a_2 nu divide a_1, a_3 nu divide pe a_2, $\ldots$, a_{m-1} nu divide pe a_{m-2} şi a_1 nu divide pe a_{m-1}.

Vom arăta că numărul perechilor bune în care apare a_m este cel mult $m-2$. Pentru fiecare $k = 1, \ldots, m-1$, cel mult una dintre perechile (a_k, a_m), (a_m, a_k) este bună. Dacă există un k pentru care niciuna dintre aceste perechi nu este bună, atunci numărul perechilor bune în care apare a_m este cel mult $m-2$. În caz contrar, cum perechile (a_m, a_k) şi (a_{k+1}, a_m), $k = 1, \ldots, m-2$, nu sunt simultan bune, iar perechea (a_1, a_m) nu este bună, rezultă că toate perechile (a_m, a_k), $k = 1, \ldots, m-1$, sunt bune, în contradicţie cu faptul că a_m nu divide a_{m-1}.

Deci $k(a_1, \ldots, a_m) \leq k(a_1, \ldots, a_{m-1}) + m - 2 \leq \binom{m-2}{2} + m - 2 = \binom{m-1}{2}$.