

Olimpiada Națională de Matematică
Al cincilea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru
Juniori, București, 30 mai 2019

Problema 1. Dacă a, b, c sunt numere reale cu proprietatea că $ab + bc + ca = 0$, demonstrați că $2(a^2 + b^2 + c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 27a^2b^2c^2$.
Când are loc egalitatea?

Problema 2. Determinați numerele naturale nenule n pentru care $4k^2 + n$ este număr prim pentru orice număr natural k mai mic decât n .

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic în care $AB < AC$, D este piciorul înălțimii din A , H este ortocentrul, O este centrul cercului circumscris, M este mijlocul laturii $[BC]$, A' este simetricul lui H față de M , iar S este intersecția tangențelor în B și C la cercul circumscris. Tangenta în A' la cercul circumscris intersectează SC și SB în X , respectiv Y .
Dacă M, S, X, Y sunt conciclice, demonstrați că OD și SA' sunt paralele.

Problema 4. Se dau două mulțimi finite, disjuncte, de numere naturale, A și B , având n , respectiv m elemente. Se știe că orice număr natural k care aparține lui $A \cup B$ satisface cel puțin una din condițiile $k + 17 \in A$ și $k - 31 \in B$.
Demonstrați că $17n = 31m$.

Timp de lucru: 4 ore

Olimpiada Națională de Matematică
Al cincilea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru
Juniori, București, 30 mai 2019

Problema 1. Dacă a, b, c sunt numere reale cu proprietatea că $ab + bc + ca = 0$, demonstrați că $2(a^2 + b^2 + c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 27a^2b^2c^2$.

Când are loc egalitatea?

Leonard Giugiuc

Soluție:

Inegalitatea se scrie $2(a^4b^2 + a^4c^2 + b^4a^2 + b^2c^2 + c^4a^2 + c^4b^2) \geq 21a^2b^2c^2$.

Dacă $abc = 0$, nu avem ce demonstra. În acest caz, trebuie ca două dintre variabile să fie 0, iar inegalitatea din enunț este satisfăcută cu egalitate.

Dacă $abc \neq 0$, împărțim cu $a^2b^2c^2$ și ajungem la

$$2 \left[\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} \right) + \left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) + \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} \right) \right] \geq 21,$$

deci la $\frac{a^2b^2 + a^2c^2}{b^2c^2} + \frac{a^2b^2 + b^2c^2}{a^2c^2} + \frac{a^2c^2 + b^2c^2}{a^2b^2} \geq \frac{21}{2}$. Notând $ab = x, bc = y, ca = z$,

știm că $x + y + z = 0$ și vrem să demonstrăm că $\frac{x^2 + y^2}{z^2} + \frac{y^2 + z^2}{x^2} + \frac{z^2 + x^2}{y^2} \geq \frac{21}{2}$.

Este evident că două dintre numerele x, y, z au un semn, iar cel de-al treilea semn contrar. Putem presupune $xy > 0$. Înlocuind $z = -x - y$, inegalitatea

de demonstrat se scrie $\frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2} + \frac{x^2 + 2xy + 2y^2}{x^2} + \frac{y^2 + 2xy + 2x^2}{y^2} \geq \frac{21}{2}$, sau încă

$$\frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2} + 2 \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) + 2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \geq \frac{17}{2}.$$

Dar inegalitățile evidente $\frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2} \geq \frac{1}{2}$, $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq 2$ și $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ (toate satisfăcute cu egalitate dacă $x = y$), implică prin adunare inegalitatea de mai sus.

În acest caz, avem egalitate dacă $ab = ac$ și $ab + bc + ca = 0$, adică dacă $b = c = -2a$.

În concluzie, egalitate avem pentru tripletele $(\alpha, -2\alpha, -2\alpha)$, $(\alpha, 0, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, și pentru cele obținute prin permutarea componentelor acestora.

Problema 2. Determinați numerele naturale nenule n pentru care $4k^2 + n$ este număr prim pentru orice număr natural k mai mic decât n .

Soluție:

Pentru $k = 0$ rezultă că n trebuie să fie prim. Se verifică ușor că $n = 3$ și $n = 7$ au proprietatea din enunț în vreme ce $n = 2$ și $n = 5$ nu o au. Demonstrăm că niciun $n > 10$ nu are proprietatea din enunț.

Dacă $n = 4m + 1$, alegând $k = m < n$ obținem un număr compus, $(2m + 1)^2$. Așadar, există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = 4m - 1$. Dacă m are un divizor impar mai

mare ca 1, d , alegând $2k - 1 = d$ obținem că $4k^2 + 4m - 1 = (2k - 1)(2k + 1) + 4m$ este divizibil cu d și mai mare ca d , deci este număr compus.

Rămâne cazul în care $n = 2^u - 1$ (m este putere a lui 2), $u \geq 4$. Dacă u este compus, n are un divizor propriu de forma $2^a - 1$ și putem lua $k = 2^a - 1$.

Dacă $u = 4j + 1$, atunci pentru $k = 1$ se obține $2^{4j+1} + 3 = M_5$, $2^{4j+1} + 3 > 5$, deci număr compus.

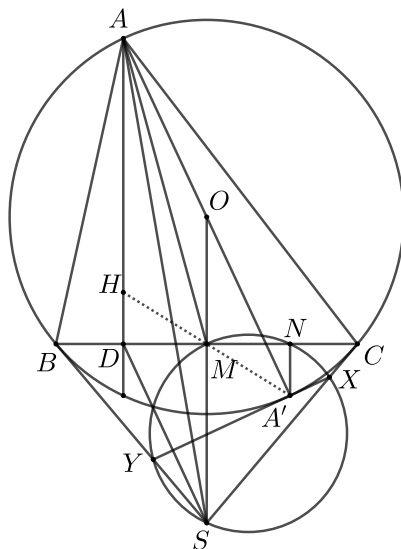
Dacă $u = 4j + 3$, $j \in \mathbb{N}^*$, atunci pentru $k = 2^{2j-1}$ avem $4k^2 + n = 2^{4j} + 2^{4j+3} - 1 = (3 \cdot 4^j)^2 - 1 = (3 \cdot 4^j - 1)(3 \cdot 4^j + 1)$, adică număr compus.

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic în care $AB < AC$, D este piciorul înălțimii din A , H este ortocentrul, O este centrul cercului circumscris, M este mijlocul laturii $[BC]$, A' este simetricul lui H față de M , iar S este intersecția tangențelor în B și C la cercul circumscris. Tangenta în A' la cercul circumscris intersectează SC și SB în X , respectiv Y .

Dacă M, S, X, Y sunt conciclice, demonstrați că dreptele OD și SA' sunt paralele.

George Picu

Soluție:



Fie N al doilea punct de intesecție a cercului circumscris lui SXY cu BC . Scriind puterile lui B și C față de cercul circumscris patrulaterului $MXSY$, avem $BM \cdot BN = BY \cdot BS$ și $CN \cdot CM = CX \cdot CS$. Cum $BM = CM$, $BS = CS$, $YB = YA'$ și $XC = XA'$, rezultă că $\frac{BY}{CX} = \frac{BY}{CX} = \frac{BA'}{CA'}$. Din varianta generalizată a teoremei bisectoarei glisante rezultă că $A'N \parallel SM$, deci N este simetricul lui D față de M . În triunghiul SXY , centrul cercului circumscris este pe SN , deci ortocentrul e pe izogonală ei, SD . Rezultă că $SD \perp XY$, adică $SD \parallel AA'$. Atunci $ADSO$ este paralelogram, deci $SD = AO$. Atunci și $SDOA'$ e paralelogram, de unde concluzia.

Remarcă: Alte proprietăți ale configurației din problemă:

M este centrul cercului circumscris triunghiului OXY . Într-adevăr, cum SM e bisectoarea lui $\angle XSY$, avem $MX = MT$. Cum $m(\angle XMY) = 180^\circ - m(\angle XSY) = 2m(\angle A) = m(\angle BOC) = 2m(\angle XOY)$ și de aici rezultă concluzia.

$OSA'N$ este trapez isoscel, deci $SN = OA' = R$, deci cercul circumscris triunghiului SXY trece prin M și N și are raza egală cu cea a cercului lui Euler a triunghiului ABC , deci este simetricul acestuia față de punctul M .

Problema 4. Se dau două mulțimi finite, disjuncte, de numere naturale, A și B , având n , respectiv m elemente. Se știe că orice număr natural k care aparține lui $A \cup B$ satisface cel puțin una din condițiile $k + 17 \in A$ și $k - 31 \in B$.

Demonstrați că $17n = 31m$.

Soluție:

Pornim de la un $x_1 \in A \cup B$ arbitrar. Dacă $x_1 + 17 \in A$, alegem $x_2 = x_1 + 17$, iar dacă $x_1 + 17 \notin A$, atunci alegem $x_2 = x_1 - 31 \in B$. Continuăm să alegem $x_{j+1} = x_j + 17$ dacă $x_j + 17 \in A$ și $x_{j+1} = x_j - 31 \in B$ în caz contrar până când obținem (pentru prima dată) un x_{j+1} care a mai fost (pentru care există $k < j$ astfel încât $x_{j+1} = x_k$). Va exista un asemenea indice j deoarece $A \cup B$ este finită. Să demonstrăm că $x_k = x_1$ (adică $k = 1$). Dacă n-ar fi așa, $x_j \neq x_{k-1}$ datorită minimalității indicelui $j + 1$. Dar atunci avem fie $x_{j+1} = x_j + 17 \in A$ și $x_k = x_{k-1} - 31 \in B$, fie, invers, $x_{j+1} = x_j - 31 \in B$ și $x_k = x_{k-1} + 17 \in A$. Cum A și B sunt disjuncte, nu putem avea $x_{j+1} = x_k$. Așadar, $x_{j+1} = x_1$. Dacă printre indicii $2, 3, \dots, j + 1$ există a indici pentru care $x_{m+1} = x_m + 17$ și deci $b = j - a$ indici pentru care $x_{m+1} = x_m - 31$, atunci adunând toate aceste relații obținem $x_1 = x_1 + a \cdot 17 - b \cdot 31$, adică $17 \cdot a = 31 \cdot b$. În plus, cei a indici pentru care $x_{t+1} = x_t + 17$ sunt tocmai aceia pentru care $x_{t+1} \in A$, în vreme ce indicii pentru care $x_{t+1} = x_t - 31$ sunt cei pentru care $x_{t+1} \in B$. Prin urmare, printre numerele x_1, x_2, \dots, x_j sunt a elemente din A și b elemente din B , cu $17a = 31b$.

Dacă prin acest procedeu nu am epuizat toate elementele lui $A \cup B$, alegem un $y_1 \in A \cup B \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_j\}$ și definim un nou șir (finit) y_1, y_2, \dots, y_s unde s este primul indice pentru care $y_s \in \{x_1, x_2, \dots, x_j, y_1, y_2, \dots, y_{s-1}\}$. Dacă $y_s \in A$, atunci $y_s = y_{s-1} + 17$. Dacă $y_s = x_r$, cu $r \in \{1, 2, \dots, j\}$, atunci $x_r \in A$ implică $x_r = x_{r-1} + 17$ (indicii sunt luați modulo j), deci $y_{s-1} = x_{r-1}$, contrazicându-se minimalitatea lui s . De asemenea, dacă $y_s = y_r$ cu $r < s$, dacă $r \neq 1$ rezultă $y_{s-1} = y_s - 17 = y_r - 17 = y_{r-1}$, contrazicându-se minimalitatea lui s . Analog se ajunge la contradicție în cazul $y_s \in B$. Așadar, $y_s = y_1$. Așa cum s-a arătat pentru numerele x_1, x_2, \dots, x_j , se arată și pentru numerele y_1, y_2, \dots, y_s că raportul dintre numărul de elemente ale lui A din acest șir și numărul de elemente ale lui B din acest șir este $\frac{31}{17}$.

Continuăm acest procedeu până epuizăm mulțimea $A \cup B$. Mulțimea $A \cup B$ va fi descompusă în „cicluri” disjuncte, în fiecare din ele raportul dintre numărul elementelor din ciclu care îi aparțin lui A și numărul celor care îi aparțin lui B fiind $\frac{31}{17}$. Atunci și reunind aceste cicluri, raportul se păstrează.