Olimpiada Naţională de Matematică
Al patrulea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori, Bucureşti, 29 mai 2019

Problema 1. Pentru un număr natural nenul m notăm cu $\tau(m)$ numărul divizorilor săi pozitivi, iar cu $\sigma(m)$ suma acestora.
Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care

$$n\sqrt{\tau(n)} \leq \sigma(n).$$

Problema 2. Fie $a, b, c, d \geq 0$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Demonstraţi că

$$\frac{a+b+c+d}{2} \geq 1 + \sqrt{abcd}.$$

Când are loc egalitatea?

Problema 3. În triunghiul ascuţitunghic ABC punctul I este centrul cercului înscris, O este centrul cercului circumscris, iar I_a este centrul cercului exînscris tangent laturii $[BC]$. Punctul A' este simetricul vârfului A faţă de dreapta BC. Demonstraţi că unghiurile $\angle IOI_a$ şi $\angle IA'I_a$ sunt congruente.

Problema 4. Pe un cerc se scriu numerele de la 1 la 100 într-o anumită ordine. Spunem despre o pereche de numere de pe cerc că este *bună* dacă cele două nu sunt vecine şi dacă pe cel puţin unul din cele două arce de cerc pe care ele le determină se află numai numere mai mici decât fiecare din ele. Cât poate fi numărul total de perechi bune?

Timp de lucru: 4 ore

Olimpiada Naţională de Matematică
Al patrulea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori, Bucureşti, 29 mai 2019

Problema 1. Pentru un număr natural nenul m notăm cu $\tau(m)$ numărul divizorilor săi pozitivi, iar cu $\sigma(m)$ suma acestora.
Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care

$$n\sqrt{\tau(n)} \leq \sigma(n).$$

Vlad Mihaly

Soluţie:
Se verifică uşor că inegalitatea este satisfăcută de orice $n \in \{1, 2, 4, 6\}$ şi nu este satisfăcută de niciun $n \in \{3, 5\}$. Egalitate avem pentru $n = 1$ şi $n = 6$. Demonstrăm că inegalitatea nu este satisfăcută de niciun n mai mare. Este uşor de văzut că $\tau(a \cdot b) = \tau(a) \cdot \tau(b)$ şi $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$ pentru orice $a, b \in \mathbb{N}^*$ cu $(a, b) = 1$. De aici se vede că dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$ cu $(a, b) = 1$ nu sunt soluţii ale inecuaţiei din enunţ, atunci nici produsul lor nu este soluţie. Vom demonstra că 2^k nu este soluţie pentru niciun $k > 3$, că p^k, $2p^k$ şi $4p^k$ nu sunt soluţii pentru niciun p prim, $p > 2$ şi niciun $k > 0$. Va rezulta că inecuaţia din enunţ nu are alte soluţii în afara celor patru amintite.

• $2^k\sqrt{\tau(2^k)} > \sigma(2^k) \Leftrightarrow 2^k\sqrt{k+1} > 2^{k+1} - 1$ rezultă de îndată ce $\sqrt{k+1} \geq 2$, deci pentru orice $k \geq 3$.

• $p^k\sqrt{\tau(p^k)} > \sigma(p^k) \Leftrightarrow p^k\sqrt{k+1}(p-1) > p^{k+1} - 1$. Ori $p^k\sqrt{k+1}(p-1) \geq p^k(p-1)\sqrt{2} > p^{k+1} > p^{k+1} - 1$, inegalitatea din mijloc fiind echivalentă cu $p > \sqrt{2} + 2$, deci adevărată pentru orice $p \geq 3$.

• $2p^k\sqrt{\tau(2p^k)} > \sigma(2p^k) \Leftrightarrow 2p^k\sqrt{2(k+1)}(p-1) > 3(p^{k+1} - 1)$.
Ori $2p^k\sqrt{2(k+1)}(p-1) \geq 4p^k(p-1) > 3p^{k+1} > 3(p^{k+1}-1)$, inegalitatea din mijloc fiind echivalentă cu $p > 4$, deci adevărată pentru orice $p \geq 5$. De asemenea, dacă $p = 3$, atunci $k \geq 2$, deci inegalitatea de demonstrat, $4 \cdot 3^k\sqrt{2(k+1)} > 3(3^{k+1}-1)$, rezultă din $4 \cdot 3^k\sqrt{2(k+1)} \geq 4\sqrt{6} \cdot 3^k > 3^{k+2} > 3(3^{k+1} - 3)$.

• $4p^k\sqrt{\tau(4p^k)} > \sigma(4p^k) \Leftrightarrow 4p^k\sqrt{3(k+1)}(p-1) > 7(p^{k+1} - 1)$.
Dar $4p^k\sqrt{3(k+1)}(p-1) \geq 4\sqrt{6}\,p^k(p-1) > 7p^{k+1} > 7(p^{k+1} - 1)$, inegalitatea din mijloc rezultând din $4\sqrt{6}\,(p-1) > 7p$, adevărată pentru orice $p \geq 5$. Pentru $p = 3$, inegalitatea $8 \cdot 3^k\sqrt{3(k+1)} > 7(3^{k+1} - 1)$ rezultă din $8 \cdot 3^k\sqrt{3(k+1)} > 7 \cdot 3^{k+1} \Leftrightarrow 8\sqrt{3(k+1)} > 21$, adevărată pentru $k \geq 2$. Pentru $p = 3$, $k = 1$ se verifică direct că $n = 12$ nu este soluţie.

Problema 2. Fie $a, b, c, d \geq 0$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Demonstraţi că

$$\frac{a+b+c+d}{2} \geq 1 + \sqrt{abcd}.$$

Când are loc egalitatea?

Leonard Giugiuc şi Valmir B. Krasniqi

Soluţia 1:
Avem $ab + cd \geq 2\sqrt{abcd}$, $ac + bd \geq 2\sqrt{abcd}$ şi $ad + bc \geq 2\sqrt{abcd}$, deci $ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 6\sqrt{abcd}$, deci este suficient să demonstrăm că

$$\frac{a+b+c+d}{2} \geq 1 + \frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}.$$

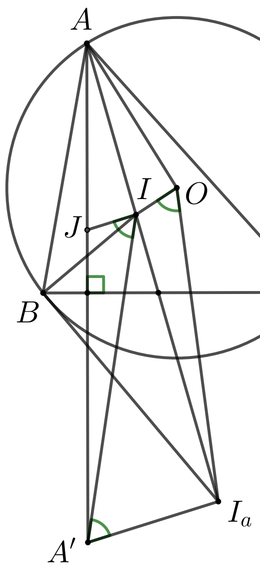
Dar $ab + ac + ad + bc + bd + cd = \dfrac{(a+b+c+d)^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2}{2} = 2p^2 - 2$, unde am notat cu $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$. Din relaţia de mai sus este evident că $p \geq 1$, iar din inegalitatea dintre media aritmetică şi cea pătratică, $p \leq 2$. Este suficient să demonstrăm că $p \geq 1 + \dfrac{p^2-1}{3}$, adică $p^2 - 3p + 2 \leq 0$, sau $(p-1)(p-2) \leq 0$, ceea ce este evident. Egalitate avem dacă $p = 2$, adică avem egalitate în inegalitatea dintre media aritmetică şi cea pătratică, deci pentru $a = b = c = d = 1$ sau dacă $p = 1$, ceea ce înseamnă $ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0$, adică trei dintre variabile egale cu 0 şi cea de-a patra egală cu 2.

Soluţia 2:
Prin ridicare la pătrat, inegalitatea se rescrie echivalent $a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \geq 4+8\sqrt{abcd}+4abcd$, adică $ab+ac+ad+bc+bd+cd \geq 4\sqrt{abcd}+2abcd$. Din inegalitatea mediilor, $4 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2} = 4\sqrt{abcd}$, de unde $abcd \leq 1$. Tot din inegalitatea mediilor, $ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 6\sqrt{abcd} = 4\sqrt{abcd} + 2\sqrt{abcd} \geq 4\sqrt{abcd} + 2abcd$.
Egalitate avem dacă $ab = ac = ad = bc = bd = cd$, adică atunci când $a = b = c = d = 1$ sau trei dintre variabile sunt 0 (şi atunci cea de-a patra este 2).

Problema 3. În triunghiul ascuţitunghic ABC punctul I este centrul cercului înscris, O este centrul cercului circumscris, iar I_a este centrul cercului exînscris tangent laturii $[BC]$. Punctul A' este simetricul vârfului A faţă de dreapta BC. Demonstraţi că unghiurile $\angle IOI_a$ şi $\angle IA'I_a$ sunt congruente.

Soluţie:
Patrulaterul IBI_aC este inscriptibil, deci $\angle AI_aC \equiv \angle IBC \equiv \angle ABI$ şi, cum $\angle BAI \equiv \angle I_aAC$, rezultă că triunghiurile ABI şi AI_aC sunt asemenea (UU). Rezultă că $AI \cdot AI_a = AB \cdot AC$. Pe de altă parte, $AB \cdot AC = \dfrac{2S}{\sin A} = \dfrac{a \cdot h_a}{\sin A} = 2R \cdot h_a = AA' \cdot AO$. Cum $\angle A'AI \equiv \angle I_aAO$ (pentru că AA' şi AO sunt izogonale în $\angle BAC$), rezultă că triunghiurile AOI_a şi AIA' sunt asemenea.

Fie J punctul în care paralela prin I la I_aA' intersectează AA'. Atunci $\frac{AJ}{AI} = \frac{AA'}{AI_a} = \frac{AI}{AO}$, deci triunghiurile AJI şi AIO sunt asemenea. Rezultă că $m(\angle IOI_a) = m(\angle AOI_a) - m(\angle AOI) = m(\angle AIA') - m(\angle AIJ) = m(\angle JIA') = m(\angle IA'I_a)$, de unde concluzia.



Problema 4. Pe un cerc se scriu numerele de la 1 la 100 într-o anumită ordine. Spunem despre o pereche de numere de pe cerc că este *bună* dacă cele două nu sunt vecine şi dacă pe cel puţin unul din cele două arce de cerc pe care ele le determină se află numai numere mai mici decât fiecare din ele. Cât poate fi numărul total de perechi bune?

Soluţia 1:
Vom demonstra că numărul perechilor bune este mereu 97.
Vom face anumite modificări asupra ordinii numerelor de pe cerc. Vom arăta că aceste modificări nu schimbă numărul perechilor bune. Mai întâi vom face rocade între numărul 1 şi câte unul din vecinii săi până ce numărul 1 ajunge lângă 100. O astfel de rocadă nu schimbă numărul perechilor bune. Într-adevăr, dacă facem rocada între 1 şi unul din vecinii săi, n, toate perechile bune ce nu îl conţin n rămân bune. În plus, nu există perechi bune care să îl conţină pe 1. Perechile bune care îl conţin pe n rămân bune, cu excepţia perechii care îl conţine pe n şi pe celălalt vecin al lui 1. În locul acestei perechi apare perechea bună formată din n şi fostul său vecin diferit de 1. Aşadar, în urma efectuării acestei rocade, numărul perechilor bune nu s-a schimbat. Efectuăm astfel de rocade până când 1 ajunge lângă 100.

Vom face apoi rocade între 2 şi vecinii săi până când 2 ajunge după 1, astfel încât 1 să fie între 100 şi 2. Se arată analog că aceste rocade nu modifică numărul perechilor bune. Se continuă cu efectuarea de astfel de rocade până când se ajunge ca ordinea numerelor pe cerc să fie $1, 2, 3, \ldots, 100$. Aici se vede uşor că singurele perechi bune sunt $\{k, 100\}$, unde $k \in \{2, 3, \ldots, 98\}$, deci că sunt 97 de perechi bune.

Soluţia 2: (dată în concurs de *Iustinian Constantinescu*)
Sunt 97 de perechi bune. Vom arăta prin inducţie că pentru un cerc cu numerele de la 1 la n sunt $n-3$ perechi bune.
Pentru $n = 3$ este evident, doarece toate numerele sunt vecine.
Pentru un cerc cu numerele de la 1 la $n+1$. scoatem numărul 1 şi scădem 1 din toate celelalte numere. Toate perechile bune care nu îl conţineau pe 1, cu excepţia celei formate din cei doi vecini ai lui 1, rămân bune deoarece dacă un număr era mai mare decât un altul în cercul cu $n+1$ numere, el rămâne la fel şi în cercul cu n numere. Analog pentru perechile care nu erau bune şi nu îl conţineau pe 1. Perechile care îl conţineau pe 1 nu erau bune şi dispar, deci pot fi ignorate. Mai rămâne perechea formată din cei doi vecini ai lui 1 care era bună înainte şi nu după, deci numărul de perechi bune în cercul cu $n+1$ numere este cu 1 mai mare decât în cercul cu n numere.