Olimpiada Naţională de Matematică
Al treilea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori, Bucureşti, 17 mai 2019

Problema 1. Determinaţi toate numerele naturale k pentru care există numerele naturale n şi m, $m \geq 2$, astfel ca $3^k + 5^k = n^m$.

Problema 2. Fie O centrul cercului circumscris unui triunghi ascuţitunghic ABC în care $m(\angle B) < m(\angle C)$. Dreapta AO intersectează latura BC în D. Fie E şi F centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD, respectiv ACD. Pe prelungirile laturilor $[AB]$ şi $[AC]$, dincolo de A, se consideră punctele G, respectiv H astfel încât $AG = AC$ şi $AH = AB$. Demonstraţi că patrulaterul $EFGH$ este dreptunghi dacă şi numai dacă $m(\angle ACB) - m(\angle ABC) = 60°$.

Problema 3. Fie a, b, c, d numere reale satisfăcând condiţiile $|a|, |b|, |c|, |d| > 1$ şi $abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0$. Demonstraţi că

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

Problema 4. Pătrăţelele unitate ale unui dreptunghi $1 \times (2n+1)$ se colorează cu alb sau cu negru. Spunem că un pătrăţel este echilibrat dacă suma dintre numărul pătrăţelelor albe situate la stânga sa şi numărul de pătrăţele negre situate la dreapta sa este n.
Arătaţi că există un număr impar de pătrăţele echilibrate.

Olimpiada Naţională de Matematică
Al treilea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori, Bucureşti, 17 mai 2019

Problema 1. Determinaţi toate numerele naturale k pentru care există numerele naturale n şi m, $m \geq 2$, astfel ca $3^k + 5^k = n^m$.

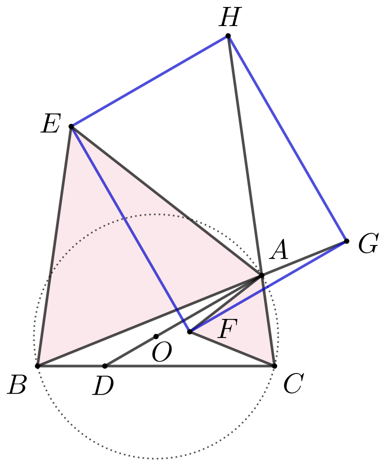
Soluţie:
Evident $k = 1$ are proprietatea cerută: $3^1 + 5^1 = 2^3$. Vom demonstra că celelalte numere naturale nu au această proprietate.
Să observăm că $k = 0$ nu convine şi că, dacă $k > 0$ este par, atunci $3^k \equiv 5^k \equiv 1 \pmod 4$, deci $3^k + 5^k \equiv 2 \pmod 4$. Aşadar exponentul lui 2 în descompunerea în factori primi a lui $3^k + 5^k$ este 1, iar exponentul lui 2 în descompunerea lui n^m trebuie să fie un multiplu de m. Prin urmare, k nu poate fi număr par.
Pentru $k > 1$ impar, putem scrie $3^k + 5^k = (3 + 5)(3^{k-1} - 3^{k-2} \cdot 5 + \ldots + 5^{k-1})$.
În paranteza a doua avem o sumă cu un număr impar de termeni impari, deci un număr impar. Exponentul lui 2 în descompunerea lui $3^k + 5^k$ fiind 3, trebuie ca $m = 3$.
Observăm că $3^k \equiv 0 \pmod 9$ şi că m^3, un cub perfect, poate fi congruent numai cu -1, 0 1 modulo 9. Deoarece $5^k \equiv 5 \pmod 9$ dacă $k \equiv 1 \pmod 6$, $5^k \equiv -1$ dacă $k \equiv 3 \pmod 6$ şi $5^k \equiv 3 \pmod 9$ dacă $k \equiv 5 \pmod 6$, deducem că singura posibilitate este $k \equiv 3 \pmod 6$, adică k să fie multiplu de 3.
Am ajuns astfel la o ecuaţie de forma $x^3 + y^3 = z^3$, $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, ecuaţie despre care se ştie că nu are soluţii. (Se poate invoca Marea teoremă a lui Fermat).
Alternativ, o analiză modulo 7 arată că $3^k + 5^k \equiv 5 \pmod 7$ dacă $k \equiv 3 \pmod 6$, în vreme ce, se ştie şi se şi arată uşor, un cub perfect poate fi congruent numai cu -1, 0 sau 1 modulo 7.

Problema 2. Fie O centrul cercului circumscris unui triunghi ascuţitunghic ABC în care $m(\angle B) < m(\angle C)$. Dreapta AO intersectează latura BC în D. Fie E şi F centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD, respectiv ACD. Pe prelungirile laturilor $[AB]$ şi $[AC]$, dincolo de A, se consideră punctele G, respectiv H astfel încât $AG = AC$ şi $AH = AB$. Demonstraţi că patrulaterul $EFGH$ este dreptunghi dacă şi numai dacă $m(\angle ACB) - m(\angle ABC) = 60°$.

Hojoo Lee, Short List IMO 2004

Soluţie:
Evident, $EF \perp AD$. Totodată, $m(\angle BAO) = 90° - m(\angle C) = 90° - m(\angle AGH)$, deci $AD \perp GH$. Aşadar, $EF \parallel GH$.
Pe de altă parte, $m(\angle ADC) = m(\angle B) + m(\angle BAD) = 90° - m(\angle C) + m(\angle B) < 90°$, deci triunghiul ADC este ascuţitunghic, prin urmare $F \in int(\angle DAC)$. Unghiul

$\angle ADB$ este obtuz, deci $B \in int(\angle EAD)$.
Se vede uşor că $m(\angle AFC) = 2m(\angle ADC) = m(\angle AEB)$. Triunghiurile AFC şi AEB sunt isoscele cu unghiuri congruente în vârf, deci sunt asemenea. Rezultă că $m(\angle EAF) = m(\angle A)$ şi $\dfrac{EA}{AB} = \dfrac{FA}{AC}$, deci şi triunghiurile AEF şi ABC sunt asemenea.
Atunci $EFGH$ este paralelogram dacă şi numai dacă $EF = GH$, adică dacă şi numai dacă triunghiurile AEF şi ABC sunt congruente. Acest lucru este echivalent cu triunghiurile ABE şi ACF sunt echilaterale, adică cu faptul că $m(\angle ADC) = 30°$, ceea ce este echivalent cu $m(\angle ACB) - m(\angle ABC) = 60°$.
Mai rămâne să arătăm că, în situaţia de mai sus, $EFGH$ este chiar dreptunghi. $AE = AB = AH$ şi $AF = AC = AG$ arată că în paralelogramul $EFGH$ mediatoarele a două laturi opuse se intersectează, ceea ce arată că paralelogramul este dreptunghi.



Problema 3. Fie a, b, c, d numere reale satisfăcând condiţiile $|a|, |b|, |c|, |d| > 1$ şi $abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0$. Demonstraţi că

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

Soluţie:
Condiţia e echivalentă cu $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) = (a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$, adică $\dfrac{a+1}{a-1} \cdot \dfrac{b+1}{b-1} \cdot \dfrac{c+1}{c-1} \cdot \dfrac{d+1}{d-1} = 1$. Din inegalitatea mediilor rezultă atunci că $\dfrac{2}{a-1} + \dfrac{2}{b-1} + \dfrac{2}{c-1} + \dfrac{2}{d-1} = \dfrac{a+1}{a-1} - 1 + \dfrac{b+1}{b-1} - 1 + \dfrac{c+1}{c-1} - 1 + \dfrac{d+1}{d-1} - 1 \geq$
$4\sqrt[4]{\dfrac{a+1}{a-1} \cdot \dfrac{b+1}{b-1} \cdot \dfrac{c+1}{c-1} \cdot \dfrac{d+1}{d-1}} - 4 = 0.$
Egalitate am avem dacă $\dfrac{a+1}{a-1} = \dfrac{b+1}{b-1} = \dfrac{c+1}{c-1} = \dfrac{d+1}{d-1}$ şi $abc + abd + acd +$

$bcd + a + b + c + d = 0$, adică pentru $a = b = c = d$, deci $4a^3 + 4a = 0$, în fine $a = b = c = d = 0$ care însă nu verifică $|a|, |b|, |c|, |d| > 1$.
Aşadar inegalitatea este strictă.

Problema 4. Pătrăţelele unitate ale unui dreptunghi $1 \times (2n + 1)$ se colorează cu alb sau cu negru. Spunem că un pătrăţel este echilibrat dacă suma dintre numărul pătrăţelelor albe situate la stânga sa şi numărul de pătrăţele negre situate la dreapta sa este n.
Arătaţi că există un număr impar de pătrăţele echilibrate.

Olimpiadă Spania, 2018

Soluţie:
Definim scorul fiecărui pătrăţel ca fiind suma dintre numărul pătrăţelelor albe situate la stânga sa şi numărul de pătrăţele negre situate la dreapta sa. Aşadar, un pătrăţel este echilibrat dacă are scorul n. Se vede uşor că două pătrăţele vecine au acelaşi scor dacă şi numai dacă nu sunt la fel colorate.
De aici se poate continua în cel puţin două feluri: (notăm A = pătrăţel alb, N = pătrăţel negru)
- fie eliminăm toate perechile formate de două pătrăţele vecine de culori diferite,
- fie intervertim mereu grupurile AN (până ce pătrăţelele negre ajung toate la început).

• Dacă le eliminăm, scorul fiecăruia din pătrăţelele celelalte scade cu 1. Cele două pătrăţele scoase, fie erau ambele echilibrate, fie niciuna; dintre celelalte pătrăţele, cele care erau echilibrate rămân echilibrate (le scade scorul cu 1 dar şi n scade cu 1). Prin urmare, paritatea numărului de pătrăţele echilibrate nu se schimbă.
După k asemenea operaţii am eliminat $2k$ pătrăţele şi am rămas cu $2n - 2k + 1$ pătrăţele de aceeăsi culoare. Scorurile acestora sunt $0, 1, 2, \ldots, 2n - 2k$ (de la stânga la dreapta sau de la dreapta spre stânga în funcţie de culoarea pătrăţelelor rămase). Printre scorurile celor $2(n - k) + 1$ pătrăţele rămase, $n - k$ apare exact o dată, deci la sfârşit există un singur pătrăţel echilibrat. Prin urmare numărul pătrăţelelor echilibrate a fost mereu impar.

• Dacă le intervertesc, scorurile celorlalte pătrăţele nu se schimbă, iar cele două pătrăţele intervertite vor avea în continuare scoruri egale, deci paritatea numărului de bile echilibrate nu s-a schimbat. Intervertim până ajungem la configuraţia în care avem toate pătraţelele negre în faţă (în stânga) urmate de cele albe. Dacă avem k negre şi $2n + 1 - k$ albe, scorurile sunt, în ordine, $k - 1$, $k - 2$, ... , 1, 0, 0, 1, ... , $2n - k$. În această listă numărul n apare exact o dată, deci numărul pătrăţelelor echilibrate a fost mereu impar.