Olimpiada Naţională de Matematică
Al doilea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori, Bucureşti, 15 mai 2019

Problema 1. Determinaţi numerele naturale nenule a şi b, cu $(a, b) = 1$, care verifică relaţia $a^2 + b = (a - b)^3$.

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi A o mulţime formată din $8n + 1$ numere naturale nenule, prime cu 6 şi mai mici decât $30n$. Demonstraţi că există $a, b \in A$ astfel încât a divide b.

Problema 3. Un cerc cu centrul în O este tangent interior la două cercuri secante situate în interiorul său. Dacă S şi T sunt punctele de tangenţă, iar M şi N sunt punctele de intersecţie a celor două cercuri, cu N situat mai aproape de dreapta ST decât M, demonstraţi că dreptele OM şi MN sunt perpendiculare dacă şi numai dacă punctele S, N şi T sunt coliniare.

Problema 4. Fie a, b două numere reale pozitive astfel încât $3(a^2 + b^2 - 1) = 4(a + b)$. Găsiţi valoarea minimă a expresiei

$$\frac{16}{a} + \frac{1}{b}.$$

Timp de lucru: 4 ore

Olimpiada Naţională de Matematică
Al doilea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori, Bucureşti, 15 mai 2019

Problema 1. Determinaţi numerele naturale nenule a şi b, cu $(a, b) = 1$, care verifică relaţia $a^2 + b = (a - b)^3$.

Lucian Petrescu şi Mircea Fianu

Soluţia 1:
Fie $c = a - b$. Evident, $c \in \mathbb{Z}$, $c \geq 2$. Atunci $a = b + c$, deci ecuaţia din enunţ se scrie $(b + c)^2 + b = c^3$. Deducem că c divide $b^2 + b = b(b + 1)$ şi, cum $(b, c) = 1$, obţinem că c divide $b + 1$. Pe de altă parte, b divide $c^3 - c^2 = c^2(c - 1)$, deci b divide $c - 1 > 0$. Avem aşadar $c \leq b + 1$ şi $b \leq c - 1$, deci $b = c - 1$. Revenind la ecuaţia $(b+c)^2 + b = c^3$, obţinem că $4c^2 - 3c = c^3$, adică $c(c-1)(c-3) = 0$. Cum $c \geq 2$, rezultă $c = 3$, $b = 2$, $a = 5$, numere care satisfac într-adevăr condiţiile din enunţ.

Soluţia 2:
Avem $a^2 + b = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, de unde a divide $b^3 + b = b(b^2 + 1)$ şi b divide $a^3 - a^2 = a^2(a - 1)$. Cum $(a, b) = 1$, rezultă $a \mid b^2 + 1$ şi $b \mid a - 1$. Fie $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $a - 1 = kb$. Atunci $a = kb+1$ îl divide pe b^2+1, deci şi pe $k(b^2+1) - b(kb+1)$, adică pe $k - b$. Cum $kb+1 > |k-b|$, rezultă $k - b = 0$, deci $a = b^2+1$. Substutuind în ecuaţia iniţială se obţine după calcule ecuaţia $b(b^5 - 3b^4 + 5b^3 - 7b^2 + 4b - 4) = 0$. Din condiţia $b^5 - 3b^4 + 5b^3 - 7b^2 + 4b - 4 = 0$ rezultă $b \mid 4$, iar verificând $b = 1$, $b = 2$, $b = 4$ se obţine $b = 2$ unica soluţie. Rezultă $a = b^2 + 1 = 5$.

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi A o mulţime formată din $8n + 1$ numere naturale nenule, prime cu 6 şi mai mici decât $30n$. Demonstraţi că există $a, b \in A$ astfel încât a divide b.

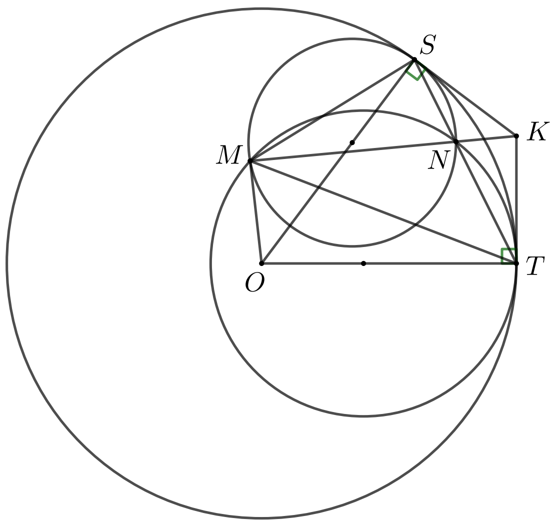
Cristinel Mortici

Soluţie:
În mulţimea $\{1, 2, \ldots, 30n\}$ sunt $10n$ numere prime cu 30.
Într-adevăr, dacă $A_1 = \{1 \leq x \leq 30n \mid 2 \text{ divide } x\}$, $A_2 = \{1 \leq x \leq 30n \mid 3 \text{ divide } x\}$, $A_3 = \{1 \leq x \leq 30n \mid 5 \text{ divide } x\}$, atunci $A = \{1, 2, \ldots, 30n\} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$, deci $\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 15n + 10n + 6n - 5n - 3n - 2n + n = 22n$, apoi $\text{card}\, A = 30n - 22n = 8n$. (Altfel: sunt câte n numere care dau fiecare din resturile 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 la împărţirea cu 30.)
Fiecare $x \in A$ se poate scrie $5^\alpha \cdot x_0$, unde $(x_0, 30) = 1$. Cum A conţine $8n + 1$ elemente, există $a, b \in A$ astfel încât $a = 5^p a_0$, $b = 5^q b_0$ cu $a_0 = b_0$. Atunci $a \mid b$ sau $b \mid a$.

Problema 3. Un cerc cu centrul în O este tangent interior la două cercuri secante situate în interiorul său. Dacă S şi T sunt punctele de tangenţă, iar M şi N sunt punctele de intersecţie a celor două cercuri, cu N situat mai aproape de dreapta ST decât M, demonstraţi că dreptele OM şi MN sunt perpendiculare dacă şi numai dacă punctele S, N şi T sunt coliniare.

Soluţie:
Tangentele în S şi T la cercul mare se intersectează într-un punct K. Atunci patrulaterul $KSOT$ este inscriptibil. De asemenea, $KS = KT$ şi, cum KS şi KT sunt tangente şi cercurilor mici, punctul K are aceeaşi putere faţă de cele două cercuri. Atunci K se află pe axa radicală a celor două cercuri, adică $K \in MN$. Din $KS^2 = KN \cdot KM$ rezultă că triunghiurile KSN şi KMS sunt asemenea, deci $\sphericalangle KNS \equiv \sphericalangle KSM$. Analog rezultă că $\sphericalangle KNT \equiv \sphericalangle KTM$. Atunci:

$$S, N, T\text{-coliniare} \Leftrightarrow m(\sphericalangle KNS) + m(\sphericalangle KNT) = 180^\circ \Leftrightarrow$$
$$m(\sphericalangle KSM) + m(\sphericalangle KTM) = 180^\circ \Leftrightarrow SMTK\text{-inscriptibil} \Leftrightarrow$$
$$O, M, S, T, K\text{-conciclice} \Leftrightarrow m(\sphericalangle OMK) = 90^\circ \Leftrightarrow OM \perp MN.$$



Problema 4. Fie a, b două numere reale pozitive astfel încât $3(a^2+b^2-1) = 4(a+b)$. Găsiţi valoarea minimă a expresiei

$$\frac{16}{a}+\frac{1}{b}.$$

Marius Stănean

Soluţie:
Să observă mai întâi că valoarea minimă a expresiei se obţine atunci când $a \geq b$. Folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz, putem scrie următoarele

$$\frac{16}{a}+\frac{1}{b}=\frac{8^2}{4a}+\frac{1}{b}\geq\frac{(8+1)^2}{4a+b}=\frac{81}{4a+b}, \tag{1}$$

cu egalitate atunci când $a=2$, $b=1$, valori care verifică şi condiţia din ipoteză. Pe de altă parte, relaţia din ipoteză poate fi scrisă succesiv

$$9(a^2+b^2-1)=12(a+b),$$

$$(3a-2)^2+(3b-2)^2=17.$$

Folosind din nou inegalitatea Cauchy-Schwarz, putem scrie

$$\left[(3a-2)^2+(3b-2)^2\right](4^2+1^2)\geq[4(3a-2)+3b-2]^2,$$

sau

$$(12a+3b-10)^2\leq 17^2,$$

iar de aici

$$4a+b\leq 9.$$

Prin urmare revenind la (1), rezultă că

$$\frac{16}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{81}{4a+b}\geq 9.$$

Egalitatea se obţine dacă şi numai dacă $a=2$, $b=1$.

Observaţie: Inegalitatea $4a+b\leq 9$ poate fi demonstrată şi astfel: condiţia din enunţ se poate scrie ca o ecuaţie de gradul II în variabila b, $3b^2-4b+(3a^2-4a-3)=0$. Condiţia de existenţă a lui b, anume $\Delta\geq 0$, revine la $9a^2-12a-13\leq 0$, deci la $a<\frac{2+\sqrt{17}}{3}$. Revenind la ecuaţia de gradul II, obţinem că $b=\frac{2\pm\sqrt{13+12a-9a^2}}{3}\leq\frac{2+\sqrt{13+12a-9a^2}}{3}\leq 9-4a$. Ultima inegalitate este echivalentă cu $\sqrt{13+12a-9a^2}\leq 25-12a$. Se vede uşor că $a<\frac{2+\sqrt{17}}{3}\Rightarrow 25-12a>0$ şi atunci inegalitatea anterioară revine la $13+12a-9a^2\leq(25-12a)^2$ şi apoi la $153(a-2)^2\geq 0$, inegalitate evidentă, satisfăcută cu egalitate dacă $a=2$.