Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Deva, 23 aprilie 2019

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a VIII-a

Problema 1. Considerăm A, mulţimea numerelor naturale cu exact 2019 divizori naturali, şi pentru fiecare $n \in A$, notăm

$$S_n = \frac{1}{d_1 + \sqrt{n}} + \frac{1}{d_2 + \sqrt{n}} + ... + \frac{1}{d_{2019} + \sqrt{n}},$$

unde $d_1, d_2, ..., d_{2019}$ sunt divizorii naturali ai lui n.

Determinaţi valoarea maximă a lui S_n când n parcurge mulţimea A.

Soluţie. Deoarece $2019 = 3 \cdot 673$ şi 673 este prim, rezultă că orice număr din A are una din formele: p^{2018}, cu p număr prim, sau $p^2 \cdot q^{672}$, cu p, q prime distincte. Astfel, cel mai mic număr din mulţimea A este $3^2 \cdot 2^{672}$ **2p**

Deoarece d_i divizor al lui $n \Leftrightarrow \dfrac{n}{d_i}$ divizor al lui n obţinem că

$$2 \cdot S_n = \sum_{i=1}^{2019} \left(\frac{1}{d_i + \sqrt{n}} + \frac{1}{\frac{n}{d_i} + \sqrt{n}} \right) = \sum_{i=1}^{2019} \left(\frac{1}{d_i + \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{d_i}{d_i + \sqrt{n}} \right) = \frac{2019}{\sqrt{n}}$$

.... **4p**

Rezultă $S_n = \dfrac{2019}{2 \cdot \sqrt{n}} \leq \dfrac{3 \cdot 673}{2 \cdot \sqrt{3^2 \cdot 2^{672}}} = \dfrac{673}{2^{337}}$, valoarea maximă a lui S_n, când n parcurge A. Egalitatea se atinge pentru $n = 3^2 \cdot 2^{672}$.

.... **1p**

Problema 2. Arătaţi că dacă numerele $a, b, c \in (0, \infty)$ verifică relaţia $a + b + c = 3$, atunci:

$$\frac{a}{3a + bc + 12} + \frac{b}{3b + ca + 12} + \frac{c}{3c + ab + 12} \leq \frac{3}{16}.$$

Soluţie. $3a + bc + 12 = (a + b + c)a + bc + 4 + 8 = a^2 + ab + bc + ca + 4 + 8 = (a + b)(a + c) + 4 + 8 \geq 2\sqrt{(a + b)(a + c) \cdot 4} + 8 = 4\sqrt{(a + b)(a + c)} + 8$ **2p**

Folosind inegalitatea $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$, urmează că

$$\frac{a}{3a + bc + 12} \leq \frac{a}{4\sqrt{(a + b)(a + c)} + 8} = \frac{a}{4} \frac{1}{\sqrt{(a + b)(a + c)} + 2} \leq \frac{a}{16} \left(\frac{1}{\sqrt{(a + b)(a + c)}} + \frac{1}{2} \right)$$

.... **2p**

Deoarece $\dfrac{a}{\sqrt{(a + b)(a + c)}} = \sqrt{\dfrac{a}{a + b} \cdot \dfrac{a}{a + c}} \leq \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{a}{a + b} + \dfrac{a}{a + c} \right)$, rezultă

$$\frac{a}{3a+bc+12} \leq \frac{1}{32}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}+a\right)$$

şi analoagele

$$\frac{b}{3b+ca+12} \leq \frac{1}{32}\left(\frac{b}{b+c}+\frac{b}{b+a}+b\right),$$

$$\frac{c}{3c+ab+12} \leq \frac{1}{32}\left(\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}+c\right)$$

care prin adunare conduc la inegalitatea cerută.................................. **3p**

Problema 3. În prisma hexagonală regulată $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, construim P, Q, proiecţiile punctului A pe dreptele A_1B respectiv A_1C şi R, S, proiecţiile punctului D_1 pe dreptele A_1D respectiv C_1D.

a) Determinaţi măsura unghiului dintre planele (AQP) şi (D_1RS).

b) Arătaţi că $\widehat{AQP} \equiv \widehat{D_1RS}$.

Soluţie. a) Fie T, proiecţia punctului A pe dreapta A_1D. Din proprietăţile hexagonului regulat, $DB \perp AB$, iar din $AA_1 \perp (ABC)$ avem $DB \perp AA_1$, deci $DB \perp (A_1AB)$, plan ce include dreapta AP. Rezultă că AP este perpendiculară pe DB şi A_1B, deci pe planul lor, (A_1BD). Conform reciprocei întâi a teoremei celor trei perpendiculare obţinem că $PT \perp A_1D$.

Analog, $DC \perp (A_1AC)$, $AQ \subset (A_1AC)$ deci $DC \perp AQ$. Deoarece $AQ \perp A_1C$ obţinem $AQ \perp (A_1DC)$. Conform reciprocei întâi a teoremei celor trei perpendiculare rezultă că $QT \perp A_1D$.

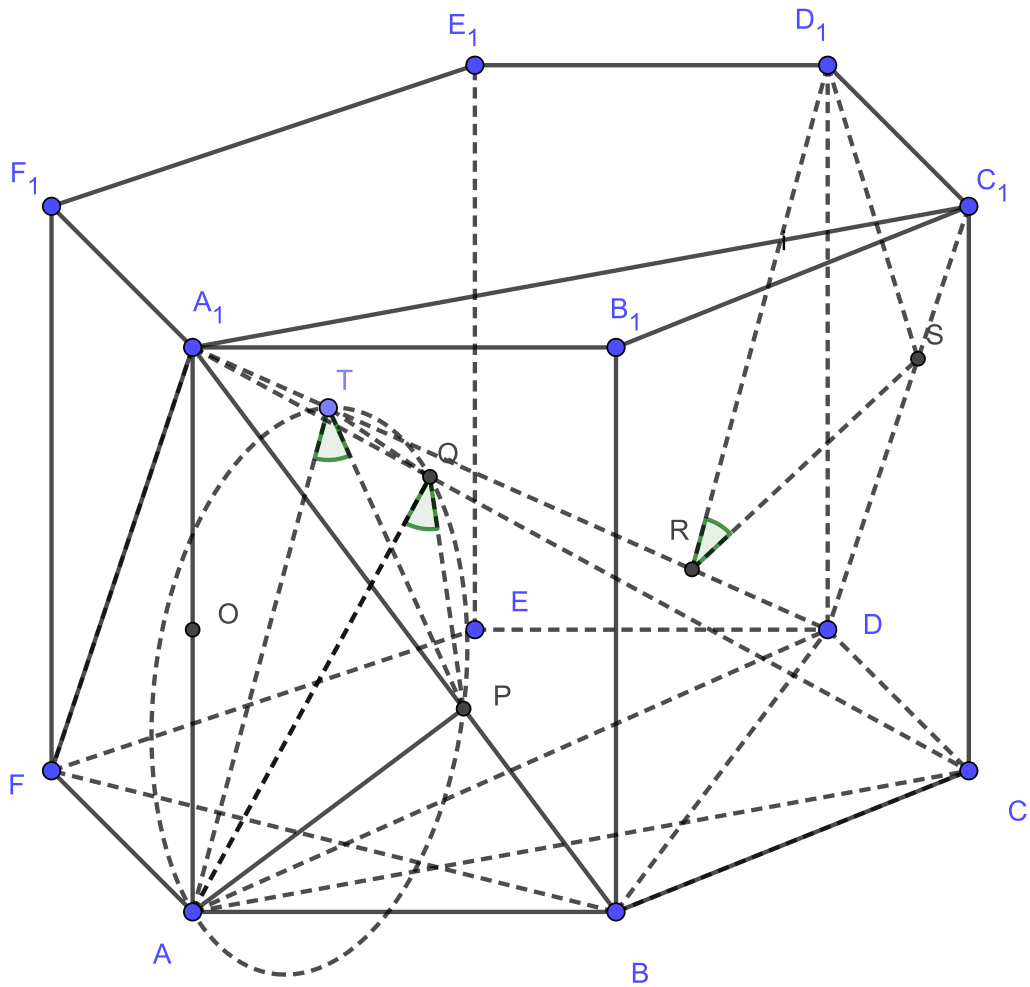
Întrucât dreptele TA, TP, TQ sunt toate perpendiculare pe A_1D, ele sunt sunt incluse în unicul plan dus prin T, perpendicular pe A_1D.................................. **3p**

Analog $A_1C_1 \perp (CDC_1D_1)$, deci A_1C_1 este perpendiculară şi pe dreapta D_1S, ca dreaptă inclusă în acest plan. Aşadar D_1S este perpendiculară pe două drepte concurente , DC_1 şi A_1C_1, incluse în planul (DA_1C_1), deci este perpendiculară pe el şi apoi pe A_1D, ca dreapta inclusă în el. Aşadar A_1D este perpendiculară pe D_1R şi D_1S deci pe planul lor, (D_1RS).

În concluzie planele (AQP) şi (D_1RS) sunt perpendiculare pe A_1D, deci vor fi paralele şi vor forma un unghi de $0°$.. **2p**

b) Mijlocul O al muchiei AA_1 este egal depărtat de punctele A, P, Q, T, deci este centrul sferei ce conţine aceste puncte. Din coplanaritatea demonstrată la la punctul anterior, rezultă că punctele A, P, Q, T sunt conciclice deci $\widehat{AQP} \equiv \widehat{ATP}$. Însă triunghiurile D_1SR şi APT sunt dreptunghice în S respectiv P şi au $D_1S = AP$ şi $D_1R = AT$, deci sunt congruente, rezultând $\widehat{D_1RS} \equiv \widehat{ATP}$. Din egalităţile de mai sus deducem $\widehat{AQP} \equiv \widehat{D_1RS}$.

.... **2p**



E1
D1
F1
C1
A1
B1
T
Q
S
R
O
E
D
P
F
C
A
B

Problema 4. Aflaţi numerele naturale x, y, z care verifică ecuaţia:

$$2^x + 3 \cdot 11^y = 7^z.$$

Soluţie. Dacă $x = 0$, $1 + 3 \cdot 11^y = 7^z$, imposibil din motive de paritate.

Deoarece $7^z = \mathcal{M}3 + 1, 3 \cdot 11^y = \mathcal{M}3$ deducem că x este par **1p**

Dacă z este impar atunci $x = 2$, altfel, dacă prin absurd $x \geq 4$ obţinem $2^x = \mathcal{M}8$, şi în funcţie de paritatea lui y, $3 \cdot 11^y = \mathcal{M}8 + 3$ sau $3 \cdot 11^y = \mathcal{M}8 + 1$, imposibil căci $7^z = \mathcal{M}8 - 1$.

Dacă $x = 2$ atunci $4 + 3 \cdot 11^y = 7^z \Rightarrow y = 0$, altfel dacă $y \geq 1 \Rightarrow 7^z \equiv 4 \pmod{11}$, imposibil pentru z impar, căci $7^{10k} \equiv 1 \pmod{11}, 7^{10k+1} \equiv 7 \pmod{11}$, $7^{10k+2} \equiv 5 \pmod{11}, 7^{10k+3} \equiv 2 \pmod{11}, 7^{10k+4} \equiv 3 \pmod{11}$, $7^{10k+5} \equiv 10 \pmod{11}$, $7^{10k+6} \equiv 4 \pmod{11}, 7^{10k+7} \equiv 6 \pmod{11}, 7^{10k+8} \equiv 9 \pmod{11}, 7^{10k+9} \equiv 8 \pmod{11}$.

Obţinem astfel soluţia $x = 2, y = 0, z = 1$ **2p**

Dacă z este par, $z = 2z_1, z_1 \geq 1$ şi $x = 4x_1, x_1 \geq 1$ obţinem $3 \cdot 11^y = 7^{2z_1} - 2^{4x_1} = (7^{z_1} - 2^{2x_1}) \cdot (7^{z_1} + 2^{2x_1})$.

Deoarece $(7^{z_1} - 2^{2x_1}, 7^{z_1} + 2^{2x_1}) = 1$ şi $7^{z_1} + 2^{2x_1} = \mathcal{M}3 + 2$, obţinem sistemul de ecuaţii $7^{z_1} - 2^{2x_1} = 3,\ 7^{z_1} + 2^{2x_1} = 11^y$. Dacă z_1 ar fi par, $z_1 = 2z_2$, din prima ecuaţie am obţine $(7^{z_2} - 2^{x_1}) \cdot (7^{z_2} + 2^{x_1}) = 3$, ceea ce este imposibil. Deducem că z_1 este impar şi trecând în a doua ecuaţie, $2^{2x_1} = 11^y - 7^{z_1}$ este fie $\mathcal{M}8 + 2$ fie $\mathcal{M}8 + 4$. Concluzionăm că $x_1 = 1, z_1 = 1$ şi de aici soluţia $x = 4, y = 1, z = 2$.

Dacă z este par, $z = 2z_1, z_1 \geq 1$ şi $x = 4x_1 + 2, x_1 \geq 0$, obţinem analog descompunerea, $3 \cdot 11^y = 7^{2z_1} - 2^{4x_1+2} = (7^{z_1} - 2^{2x_1+1}) \cdot (7^{z_1} + 2^{2x_1+1})$, şi cum $7^{z_1} - 2^{2x_1+1} = \mathcal{M}3 + 2$ şi $(7^{z_1} - 2^{2x_1+1}, 7^{z_1} + 2^{2x_1+1}) = 1$ rezultă sistemul de ecuaţii $7^{z_1} - 2^{2x_1+1} = 11^y,\ 7^{z_1} + 2^{2x_1+1} = 3$ care evident nu are soluţie. **4p**