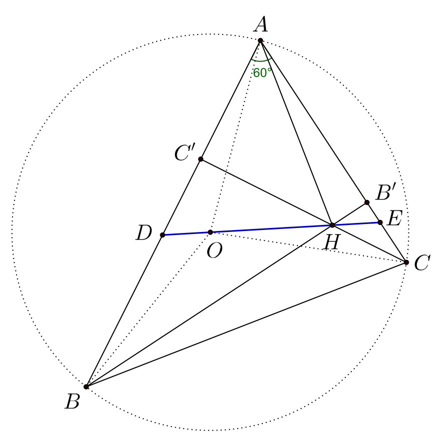
Societatea de Ştiinţe
Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale
şi Cercetării Ştiinţifice

Primul test de selecţie pentru OBMJ
Târgu Mureş, 22 aprilie 2016

Problema 1. Fie ABC un triunghi neechilateral cu $m(\angle A) = 60°$. Dacă dreapta lui Euler a triunghiului ABC intersectează laturile unghiului $\angle BAC$ în punctele D şi E, arătaţi că triunghiul ADE este echilateral.

Soluţie. Fie H şi O ortocentrul, respectiv centrul cercului circumscris triunghiului ABC, R raza cercului circumscris, D, E intersecţiile dreptei OH cu AB, respectiv AC, iar B', C' picioarele înălţimilor din B, respectiv C.
Patrulaterul $BCC'B'$ este inscriptibil, deci $\angle AB'C' \equiv \angle ABC$. Rezultă că $\Delta\, AB'C' \sim \Delta\, ABC$, cu raportul de asemănare $\dfrac{AC'}{AC} = \cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{1}{2}$. Atunci şi raportul dintre diametrele cercurilor circumscrise acestor triunghiuri este egal cu raportul de asemănare, adică $\dfrac{AH}{2R} = \dfrac{1}{2}$, deci $AH = R = AO$. (1)
Se ştie că semidreptele $(AH$ şi $(AO$ sunt izogonale, adică $\angle BAO \equiv \angle CAH$. (2)
Din (1) rezultă că $\angle AOH \equiv \angle AHO$, deci $\angle AOD \equiv \angle AHE$. Din (1) şi (2) rezultă că triunghiurile AOD şi AHE sunt congruente, deci $AD = AE$ şi concluzia.
(Ordinea punctelor pe dreapta OH depinde de care din laturile $[AB]$ şi $[AC]$ este mai lungă, dar afirmaţiile sunt valabile în ambele cazuri.)



Problema 2. Fie m, n numere naturale nenule şi fie $x, y, z \in [0, 1]$ numere reale. Demonstraţi că

$$0 \le x^{m+n} + y^{m+n} + z^{m+n} - x^m y^n - y^m z^n - z^m x^n \le 1$$

şi determinaţi cazurile de egalitate.

prelucrare *Olimpiadă Lituania*

Soluţie. (Dan Schwarz)
Fără a restrânge generalitatea, putem presupune x a fi cel mai mare dintre x, y, z, şi atunci putem scrie

$$x^{m+n}+y^{m+n}+z^{m+n}-x^m y^n-y^m z^n-z^m x^n=(x^m-z^m)(x^n-y^n)+(y^m-z^m)(y^n-z^n)\geq 0.$$

Minimul 0 se atinge deci pentru $x=\max\{y,z\}$ şi $y=z$, deci pentru $\boxed{x=y=z}$.
Maximul se atinge pentru $x=1$, şi are valoarea

$$1+y^{m+n}+z^{m+n}-y^n-y^m z^n-z^m=1-y^n(1-y^m)-z^m(1-z^n)-y^m z^n\leq 1,$$

cu egalitate doar când unul dintre y, z este 0 iar celălalt este 0 sau 1. Prin urmare există 6 cazuri de egalitate, anume
$(x,y,z)\in\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.

Problema 3. Fie M mulţimea numerelor naturale k pentru care există $n\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea că restul împărţirii lui 3^n la n este k. Demonstraţi că mulţimea M este infinită.

Ioan-Laurenţiu Ploscaru

Soluţia 1: Fie j un întreg pozitiv fixat, şi fie $p>2$ un număr prim astfel ca $2^j p>3^{2^j}$. Avem $3^{2^j}(3^{2^j(p-1)}-1)\equiv 0 \pmod{2^j p}$, căci $2\varphi(2^j p)=2^j(p-1)$. Atunci $3^{2^j p}\equiv 3^{2^j} \pmod{2^j p}$, şi deci pentru $n=2^j p$ avem $r_n=3^{2^j}$. Prin urmare, $3^{2^j}\in M$, $\forall\, j\in\mathbb{N}^*$, deci M este infinită.

Soluţia 2: Alegând $n=2\cdot 3^j$, vom avea că restul r_n al împărţirii lui 3^n la n, verifică: $r_n\neq 0$, $r_n\equiv 0 \pmod{3^j}$, deci $r_n\geq 3^j$. (De fapt $r_n=3^j$.) Prin urmare, în M există numere oricât de mare, deci M este infinită.

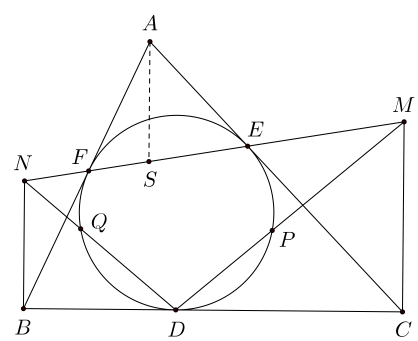
Problema 4. Fie triunghiul ABC ascuţitunghic cu $AB\neq AC$ şi D, E, F punctele de contact ale lui w, cercul înscris în triunghi, cu laturile BC, CA şi, respectiv, AB. Perpendiculara în C pe BC intersectează EF în M şi analog perpendiculara în B pe BC intersectează EF în N. Dreapta DM intersectează a doua oară w în P şi dreapta DN intersectează a doua oară w în Q. Demonstraţi că $DP=DQ$.

Rubén Dario, Perú şi Leonard Giugiuc

Soluţia 1. Fie $\{T\}=EF\cap BC$. Aplicând teorema lui Menelaus triunghiului ABC şi transversalei $E-F-T$ obţinem:
$\dfrac{TB}{TC}\cdot\dfrac{EC}{EA}\cdot\dfrac{FA}{FB}=1$, adică $\dfrac{TB}{TC}\cdot\dfrac{p-c}{p-a}\cdot\dfrac{p-a}{p-b}=1$, sau $\dfrac{TB}{TC}=\dfrac{p-b}{p-c}$, unde notaţiile sunt cele obişnuite (1).

Rezultă că triunghiurile TBN şi TCM sunt asemenea, deci $\frac{TB}{TC} = \frac{BN}{CM}$. Din (1) rezultă $\frac{BN}{CM} = \frac{p-b}{p-c}$, $\frac{BD}{CD} = \frac{p-b}{p-c}$ şi $m(\angle DBN) = m(\angle DCM) = 90°$, ceea ce arată că triunghiurile BDN şi CDM sunt asemenea, deci că unghiurile $\angle BDN$ şi $\angle CDM$ sunt congruente. Deducem că arcele DQ şi DP sunt egale, deci $DP = DQ$.

Soluţia 2.
Fie S punctul de intersecţie a înălţimii din A cu dreapta EF. Dreptele BN, AS, CM sunt paralele, deci triunghiurile BNF şi ASF sunt asemenea şi la fel sunt şi triunghiurile ASE şi CME. Obţinem $\frac{BN}{AS} = \frac{BF}{FA}$ şi $\frac{AS}{CM} = \frac{AE}{EC}$.
Înmulţind aceste două relaţii obţinem $\frac{BN}{CM} = \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AE}{EC} = \frac{BF}{EC} = \frac{BD}{DC}$.
(Am folosit că $AE = AF$, $BF = BD$ şi $CE = CD$.)
Rezultă că triunghiurile dreptunghice BDN şi CDM sunt asemenea (LUL), ceea ce ce conduce la aceeaşi finalizare ca în soluţia 1.



Problema 5. Pătratele unitate ale unei table $n \times n$, $n \geq 2$, se colorează fie cu negru fie cu alb astfel încât fiecare pătrat negru să aibă cel puţin 3 vecini albi. (Un vecin al unui pătrat unitate este un pătrat unitate cu care acesta are o latură comună.) Care este numărul maxim de pătrate unitate negre de pe tablă?

Andrei Eckstein

Soluţie:
Răspunsul este $\frac{n^2-1}{2}$ dacă n este impar şi $\frac{n^2-4}{2}$ dacă n este par.
Să observăm că:
- pătratele unitate din colţuri, neavând 3 vecini, trebuie să fie albe;
- celelalte pătrate de pe marginea tablei au doar 3 vecini, deci nu putem avea două pătrate

negre vecine pe margine;
- în orice pătrat 2×2 putem avea cel mult două pătrate negre (în caz contrar, un pătrat negru ar avea deja doi vecini negri, deci cel mult doi albi).
Dacă n este impar, putem colora tabla ca pe o tablă de şah, cu colţurile albe. Această colorare verifică proprietatea din enunţ şi conţine $\frac{n^2-1}{2}$ pătrate negre, deci numărul maxim de pătrate negre pe care îl putem avea pe tablă este cel puţin $\frac{n^2-1}{2}$.
Pe de altă parte, să împărţim tabla în 4 dreptunghiuri: un pătrat $(n-1) \times (n-1)$ în colţul din stânga sus, un pătrat unitate în colţul din dreapta jos, un dreptunghi $(n-1) \times 1$ pe latura din dreapta şi un dreptunghi $1 \times (n-1)$ pe latura de jos. Pavând pătratul $(n-1) \times (n-1)$ cu pătrate 2×2 şi dreptunghiurile formate din $n-1$ pătrate cu dominouri formate din două pătrate, conform observaţiilor de la început, putem avea cel mult $\frac{(n-1)^2}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} + 0 = \frac{n^2-1}{2}$ pătrate negre.
În concluzie, dacă n este impar, numărul maxim de pătrate negre este $\frac{n^2-1}{2}$.

Dacă n este par, putem colora tabla ca pe o tablă de şah. Această colorare va face ca două dintre colţuri să fie negre. Le recolorăm cu alb. Colorarea obţinută verifică proprietatea din enunţ şi conţine $\frac{n^2-4}{2}$ pătrate negre, deci nuărul maxim de pătrate negre pe care îl putem avea pe tablă este cel puţin $\frac{n^2-4}{2}$.
Pe de altă parte, să împărţim tabla în 9 dreptunghiuri: un pătrat $(n-2) \times (n-2)$ în mijloc, 4 pătrate unitate în colţuri şi 4 dreptunghiuri $(n-2) \times 1$ sau $1 \times (n-2)$ pe laturi. Pavând pătratul $(n-2) \times (n-2)$ cu pătrate 2×2 şi dreptunghiurile formate din $n-2$ pătrate cu dominouri formate din două pătrate, conform observaţiilor de la început, putem avea cel mult $\frac{(n-2)^2}{2} + 4 \cdot \frac{n-2}{2} + 4 \cdot 0 = \frac{n^2-4}{2}$ pătrate negre.
În concluzie, dacă n este par, numărul maxim de pătrate negre este $\frac{n^2-4}{2}$.