Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Finală, Târgu Mureş şi Sovata, 20 aprilie 2016
CLASA a 12-a

Soluţii şi barem orientativ

Problema 1. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există un unic $c_n \in (0,1)$, astfel încât

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+(c_n)^n}$$

şi calculaţi $\lim_{n\to\infty} n(c_n)^n$.

Radu Pop

Soluţie. Existenţa lui c_n este asigurată de teorema de medie aplicată funcţiei continue $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = (1+x^n)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Din injectivitatea lui f_n rezultă unicitatea lui c_n. .... **1 punct**

Fie $I_n = \int_0^1 (1+x^n)^{-1}\,\mathrm{d}x$. Cum $n(c_n)^n = n(1/I_n - 1)$, iar $|I_n - 1| = \left|\int_0^1 \frac{-x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^1 x^n dx = 1/(n+1)$, deci $\lim_{n\to\infty} I_n = 1$, este suficient să calculăm $\lim_{n\to\infty} n(1-I_n)$. .... **2 puncte**

Avem $n(1-I_n) = n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx = \int_0^1 x \cdot (\ln(1+x^n))' dx = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$. .... **2 puncte**

Din $0 \le \int_0^1 \ln(1+x^n)dx \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, ... **1 punct**

rezultă $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)dx = 0$, deci $\lim_{n\to\infty} n(c_n)^n = \ln 2$. ... **1 punct**

Problema 2. Fie A un inel şi fie D mulţimea elementelor sale neinversabile. Ştiind că $a^2 = 0$ oricare ar fi $a \in D$, să se arate că:

(a) $axa = 0$ oricare ar fi $a \in D$ şi $x \in A$;

(b) dacă D este mulţime finită cu cel puţin două elemente, atunci există $a \in D, a \ne 0$, astfel încât $ab = ba = 0$, oricare ar fi $b \in D$.

Ioan Băetu

Soluţie. **(a)** Fie $a \in D$ şi $x \in U(A)$. Cum $ax \in D$ rezultă că $axax = 0$, deci $axa = 0$. .... **1 punct**

Dcă $x \in D$, atunci $1 + x \in U(A)$, deci $a + ax = a(1+x) \in D$. Obţinem $0 = (a+ax)^2 = a^2 + a^2x + axa + axax = axa(1+x)$, deci $axa = 0$. ....
.... **1 punct**

(b) Fie P mulţimea produselor finite şi nenule de elemente din D. Cum $|D| \ge 2$, P este nevidă. .... **2 puncte**

Dacă $x = a_1a_2\cdots a_k \in P$, atunci $a_i \neq a_j$ pentru $i \neq j$. Într-adevăr, dacă există $i < j$ cu $a_i = a_j$, atunci $x = a_1a_2\cdots a_i(a_{i+1}\cdots a_{j-1})a_i\cdots a_k = 0$, fals. Rezultă că P este finită. ....**2 puncte**

Fie $a = a_1a_2\cdots a_k \in P$ pentru care k este maxim. Dacă b este unul dintre factorii lui a atunci $ab = ba = 0$, conform **(a)**. În caz contrar, cuvintele ab şi ba au lungimea strict mai mare decât k, deci nu aparţin lui P şi prin urmare $ab = ba = 0$. ....**1 punct**

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie crescătoare şi $a \in \mathbb{R}$. Să se arate că f este continuă în a dacă şi numai dacă există un şir $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_n > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât

$$\int_a^{a+a_n} f(x)dx + \int_a^{a-a_n} f(x)dx \leq \frac{a_n}{n},$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dan Marinescu

Soluţie. Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Cum f este continuă în a, atunci F este derivabilă în a şi $F'(a) = f(a)$. Rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $\delta_n > 0$ astfel încât $|F(x)/(x-a) - f(a)| \leq 1/(2n)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ cu $|x - a| < \delta_n$. Fie $a_n = \delta_n/2$, $n \geq 1$.

Pentru $x = a + a_n$ obţinem $F(a + a_n)/a_n - f(a) \leq 1/(2n)$, iar pentru $x = a - a_n$ obţinem $f(a) - F(a - a_n)/(-a_n) \leq 1/(2n)$. Prin adunarea celor două inegalităţi obţinem $F(a + a_n) + F(a - a_n) \leq a_n/n$, deci inegalitatea cerută. ....**3 puncte**

Reciproc, deoarece f este crescătoare, rezultă că $g : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = F(x)/(x - a)$, este crescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. Într-adevăr, fie $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, $a < x < y$. Cum $(x - a)F(y) = (x - a)\int_a^x f(t)dt + (x - a)\int_x^y f(t)dt \geq (x-a)\int_a^x f(t)dt + (x-a)(y-x)f(x) \geq (x-a)\int_a^x f(t)dt + (y-x)\int_a^x f(t)dt = (y - a)F(x)$, deducem $g(y) \geq g(x)$. Analog pentru $x < y < a$ şi $x < a < y$. ....**1 punct**

Fie $x_n \in (0, a_n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, cu $x_n \to 0$. Din monotonia lui g rezultă că $g(a + x_n) - g(a - x_n) \leq g(a + a_n) - g(a - a_n) \leq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. Prin trecere la limită obţinem $g(a+0) \leq g(a-0)$. Cum $g(a-0) \leq g(a+0)$ rezultă că $g(a + 0) = g(a - 0) \in \mathbb{R}$, deci F este derivabilă în a şi de aici concluzia. ....**3 puncte**

Problema 4. Fie K un corp finit cu q elemente, $q \geq 3$. Notăm cu M mulţimea polinoamelor de grad $q-2$ din $K[X]$ care au toţi coeficienţii nenuli şi distincţi doi câte doi. Determinaţi numărul polinoamelor din M care au $q - 2$ rădăcini distincte în K.

Marian Andronache

Soluţie. Cum orice polinom g din M este asociat în divizibilitate cu un unic polinom f din M, astfel încât $f(0)=1$, vom determina numărul polinoamelor de forma $f=1+a_1X+\cdots+a_{q-2}X^{q-2}$, care au proprietatea din enunţ.

Fie f un astfel de polinom, fie x_1, …, x_{q-2} rădăcinile sale şi fie

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{q-3} & a_{q-2} \\ a_{q-2} & 1 & a_1 & \dots & a_{q-4} & a_{q-3} \\ a_{q-3} & a_{q-2} & 1 & \dots & a_{q-5} & a_{q-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & 1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{q-2} & 1 \end{pmatrix}$$

şi

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ y & x_1 & x_2 & \dots & x_{q-3} & x_{q-2} \\ y^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{q-3}^2 & x_{q-2}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y^{q-3} & x_1^{q-3} & x_2^{q-3} & \dots & x_{q-3}^{q-3} & x_{q-2}^{q-3} \\ y^{q-2} & x_1^{q-2} & x_2^{q-2} & \dots & x_{q-3}^{q-2} & x_{q-2}^{q-2} \end{pmatrix},$$

unde $K^*=\{y,x_1,x_2,\dots,x_{q-2}\}$. Cum $x^{q-1}=1$, oricare ar fi x în K^*, obţinem

$$AB=\begin{pmatrix} f(y) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ yf(y) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y^2f(y) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y^{q-3}f(y) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y^{q-2}f(y) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

.... **2 puncte**

Deoarece $f(y)\neq 0$ şi B este inversabilă în $\mathcal{M}_{q-1}(K)$, rezultă că rangul lui A este 1, deci toţi minorii săi de ordin 2 sunt nuli. În particular,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} a_1 & a_{q-2} \\ 1 & a_{q-3} \end{vmatrix} = 0,$$

i.e., $a_2=a_1^2$, $a_3=a_1^3$, …, $a_{q-2}=a_1^{q-2}$, deci mulţimea coeficienţilor lui f este $\{1,a_1,a_1^2,\dots,a_1^{q-2}\}$. Cum această mulţime este egală cu K^*, rezultă că a_1 este un generator al grupului multiplicativ $(K^*,\cdot)$ şi $f=1+a_1X+a_1^2X^2+\cdots+a_1^{q-2}X^{q-2}$. .... **2 puncte**

Reciproc, orice polinom $f=1+aX+a^2X^2+\cdots+a^{q-2}X^{q-2}$, unde a este un generator al grupului multiplicativ $(K^*,\cdot)$, are proprietatea din enunţ, deoarece $f(a^{-1}X)=1+X+X^2+\cdots+X^{q-2}=\prod_{\alpha\in K^*\setminus\{1\}}(X-\alpha)$, deci f are rădăcinile $a\alpha$, unde $\alpha\in K^*\setminus\{1\}$. .... **2 puncte**

Întrucât K^* are $\phi(q-1)$ generatori, rezultă că numărul cerut este $(q-1)\phi(q-1)$. .... **1 punct**