



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Finală, Târgu Mureș, 20 aprilie 2016
CLASA a 11-a

Soluții și bareme orientative

Problema 1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice care satisface următoarele condiții:
 $\det(A^{2014} - I_2) = \det(A^{2014} + I_2)$ și $\det(A^{2016} - I_2) = \det(A^{2016} + I_2)$.
Demonstrați că $\det(A^n - I_2) = \det(A^n + I_2)$, pentru orice număr natural
nenul n .

Soluție. Pentru $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ are loc relația

$$\det(M - xI_2) = x^2 - \operatorname{tr}(M)x + \det(M), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice care satisface condițiile din enunț. Din (1)
obținem

$$\operatorname{tr}(A^{2014}) = \operatorname{tr}(A^{2016}) = 0. \quad (2)$$

..... **1 punct**
Conform teoremei Cayley-Hamilton, avem

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = O_2. \quad (3)$$

..... **1 punct**

1) Dacă $\operatorname{tr}(A) = 0$, atunci din (3) obținem $A^2 = -\det(A)I_2$, de unde
 $A^{2014} = -\det^{1007}(A)I_2$. Din (2) rezultă $\det(A) = 0$ **1 punct**

2) Dacă $\det(A) = 0$, atunci din (3) obținem $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$. Prin inducție,
 $A^{n+1} = \operatorname{tr}^n(A)A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă $\operatorname{tr}(A^n) = \operatorname{tr}^n(A)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. În particu-
lar, conform (2), $0 = \operatorname{tr}(A^{2014}) = \operatorname{tr}^{2014}(A)$, deci $\operatorname{tr}(A) = 0$ **1 punct**

Presupunem, prin reducere la absurd, $\operatorname{tr}(A) \neq 0$ și $\det(A) \neq 0$. Din (3),
 $A^{2016} - \operatorname{tr}(A)A^{2015} + \det(A)A^{2014} = O_2$. Atunci $\operatorname{tr}(A^{2016}) - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(A^{2015}) +$
 $\det(A)\operatorname{tr}(A^{2014}) = 0$. Conform (2) și presupunerii, obținem $\operatorname{tr}(A^{2015}) = 0$.

Din (3), deducem $\operatorname{tr}(A^n) = \frac{1}{\det(A)} [\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(A^{n+1}) - \operatorname{tr}(A^{n+2})]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Astfel, pornind de la $\operatorname{tr}(A^{2014}) = \operatorname{tr}(A^{2015}) = 0$, obținem, în mod recurent,
 $\operatorname{tr}(A^{2013}) = 0$, $\operatorname{tr}(A^{2012}) = 0, \dots, \operatorname{tr}(A) = 0$. Contradicție.

În concluzie $\operatorname{tr}(A) = 0$ și $\det(A) = 0$ **2 puncte**

Din (3) rezultă $A^2 = O_2$, de unde obținem $A^n = O_2$, $\forall n \geq 2$. Atunci, pen-
tru $n \geq 2$, avem $\det(A^n - I_2) = \det(-I_2) = 1 = \det(I_2) = \det(A^n + I_2)$.
Pentru $n = 1$, conform (1), $\det(A - I_2) = 1 = \det(A + I_2)$ **1 punct**

Problema 2. Pornind de la o matrice inversabilă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ având liniile L_1, L_2, \dots, L_n , construim matricele $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu liniile O, L_2, \dots, L_n și $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu liniile L_2, \dots, L_n, O , unde O desemnează o linie cu toate elementele nule. Fie matricele $D = A^{-1} \cdot B$ și $E = A^{-1} \cdot C$. Arătați că:

a) $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^2) = \dots = \text{rang}(D^n)$;

b) $\text{rang}(E) > \text{rang}(E^2) > \dots > \text{rang}(E^n)$.

Soluție. a) Considerăm matricea $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem $D = A^{-1}PA$ **1 punct**

Cum $P^2 = P$, obținem $P^k = P$, $k \in \mathbb{N}^*$ (inducție). **1 punct**

Atunci $D^k = (A^{-1}PA)^k = A^{-1}P^kA = A^{-1}PA = D$, $k \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, $\text{rang}(D^k) = \text{rang}(D) = \text{rang}(P) = n - 1$, $k = \overline{1, n}$ **1 punct**

b) Fie matricea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Avem $E = A^{-1}QA$ **1 punct**

Se verifică inductiv că matricea Q^k se reprezintă în blocuri $\begin{pmatrix} O_{n-k,k} & I_{n-k} \\ O_{k,n} & \end{pmatrix}$

(unde $I_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ este matricea unitate, iar $O_{p,q} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ este matricea nulă), pentru $k = \overline{1, n-1}$. Apoi, $Q^n = O_n$ **2 puncte**

Din $E^k = (A^{-1}QA)^k = A^{-1}Q^kA$, $k \in \mathbb{N}^*$, rezultă

$$\text{rang}(E^k) = \text{rang}(Q^k) = n - k, \quad k = \overline{1, n},$$

de unde concluzia. **1 punct**

Problema 3. Fie $a \in \mathbb{R}$. Considerăm o funcție $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$. Arătați că următoarele două afirmații sunt echivalente:

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{a+\varepsilon}} = 0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{a-\varepsilon}} = \infty$, pentru orice $\varepsilon > 0$;

$$(ii) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = a.$$

Soluție.

(i) \Rightarrow (ii). Fie $\varepsilon > 0$. Conform (i), există $m_1 > 0$ astfel ca $\frac{f(x)}{x^{a+\varepsilon}} < 1, \forall x > m_1$

și există $m_2 > 0$ astfel ca $\frac{f(x)}{x^{a-\varepsilon}} > 1, \forall x > m_2$. Notăm $m = \max\{m_1, m_2, 1\}$.

Atunci $x^{a-\varepsilon} < f(x) < x^{a+\varepsilon}, \forall x > m$. Prin logaritmare, obținem inegalitatea $a - \varepsilon < \frac{\ln f(x)}{\ln x} < a + \varepsilon, \forall x > m$. Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, rezultă

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = a. \dots\dots\dots \mathbf{3 \text{ puncte}}$$

(ii) \Rightarrow (i). Fie $\varepsilon > 0$. Conform (ii), există $m > 1$ astfel ca

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\ln f(x)}{\ln x} < a + \frac{\varepsilon}{2}, \forall x > m.$$

Obținem $x^{a-\varepsilon/2} < f(x) < x^{a+\varepsilon/2}, \forall x > m$. Ca urmare, $\frac{f(x)}{x^{a+\varepsilon}} < \frac{1}{x^{\varepsilon/2}}, \forall x > m$

și $\frac{f(x)}{x^{a-\varepsilon}} > x^{\varepsilon/2}, \forall x > m$. Dar $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\varepsilon/2} = \infty$ și $f(x) > 0, \forall x > 0$. Conform criteriilor clește și al majorării se obțin limitele de la (i). $\dots\dots\dots \mathbf{4 \text{ puncte}}$

Problema 4. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că f^2 este derivabilă pe \mathbb{R} și $(f^2)' = f$.

Soluție.

Funcția identic nulă verifică cerințele. $\dots\dots\dots \mathbf{1 \text{ punct}}$

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție neidentic nulă care verifică condițiile din enunț. Există deci $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x_0) \neq 0$. Cum f^2 este derivabilă, deci continuă, $f^2 > 0$ pe o vecinătate a lui x_0 . Notăm

$$a = \inf \{t \in (-\infty, x_0) \mid f^2(x) > 0, \forall x \in [t, x_0]\},$$

$$b = \sup \{t \in (x_0, \infty) \mid f^2(x) > 0, \forall x \in [x_0, t]\}.$$

Avem $-\infty \leq a < x_0 < b \leq \infty$ și $f(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Cum $f = (f^2)'$ are proprietatea lui Darboux (conform teoremei lui Darboux), deducem că f păstrează semn constant pe (a, b) . $\dots\dots\dots \mathbf{1 \text{ punct}}$

1) Presupunem $f(x) > 0, \forall x \in (a, b)$. Atunci $f = \sqrt{f^2}$ pe (a, b) , deci f este derivabilă pe (a, b) . Conform ipotezei, avem $2f(x)f'(x) = f(x), \forall x \in$

(a, b) . Rezultă $f'(x) = \frac{1}{2}, \forall x \in (a, b)$. Deducem că există $c \in \mathbb{R}$ astfel ca

$f(x) = \frac{x}{2} + c, x \in (a, b)$. Cum $f(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, obținem $a \geq -2c$ (deci a este finit), În acest caz, din definiția lui a și continuitatea lui f^2 rezultă

$f^2(a) = 0$. Atunci $c = -\frac{a}{2}$, deci $f(x) = \frac{x-a}{2}, x \in [a, b)$. Dacă b ar fi finit,

am obține $0 = f^2(b) = \lim_{x \uparrow b} \left(\frac{x-a}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{4}$; contradicție. Deci $b = \infty$

și prin urmare $f(x) = \frac{x-a}{2}$, $x \in [a, \infty)$.

Mai mult, $f(x) \leq 0$, $\forall x \in (-\infty, a)$. Astfel, dacă ar exista $x_1 < a$ astfel ca $f(x_1) > 0$, atunci $f(a) > 0$; contradicție. **2 puncte**

2) Presupunem $f(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$. Raționând analog, obținem b finit,

$f(x) = \frac{x-b}{2}$, $x \in (-\infty, b]$ și $f(x) \geq 0$, $\forall x \in (b, \infty)$ **1 punct**

Din cele de mai sus deducem că, pe lângă funcția nulă, următoarele tipuri de funcții $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfac condițiile din enunț:

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{2}, & x \geq a \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$;

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{x-b}{2}, & x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$, $b \in \mathbb{R}$;

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{x-b}{2}, & x \leq b \\ 0, & x \in (b, a) \\ \frac{x-a}{2}, & x \geq a \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b < a$;

4. $f(x) = \frac{x}{2} + c$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

..... **2 puncte**