

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Finală, Târgu Mureș, 20 aprilie 2016

CLASA a VII-a - Soluții și bareme orientative

Problema 1. Determinați numerele naturale n pentru care numărul

$$\sqrt{n+3} + \sqrt{n + \sqrt{n+3}}$$

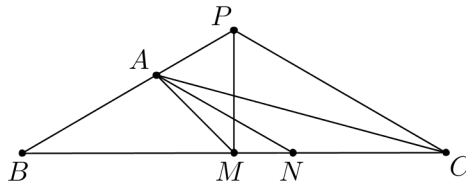
este natural.

Soluție. Notând $m = \sqrt{n+3} + \sqrt{n + \sqrt{n+3}}$, rezultă $n + \sqrt{n+3} = (m - \sqrt{n+3})^2$, de unde $(2m+1)\sqrt{n+3} = m^2 + 3$. Atunci există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $n+3 = p^2$, și, întrucât $p + \sqrt{n+p} \in \mathbb{N}$, există $q \in \mathbb{N}$ astfel încât: $n+p = q^2$ **3p**

Eliminând pe n , rezultă $p^2 - 3 = q^2 - p$, adică $4p^2 + 4p - 12 = 4q^2$, sau $(2p+1)^2 - (2q)^2 = 13$, echivalent cu $(2p+1-2q)(2p+1+2q) = 13$ **3p**

Se obține $p = 3$, pentru care $n = 6$ **1p**

Problema 2. Se consideră triunghiul ABC , în care $m(\sphericalangle B) = 30^\circ$, $m(\sphericalangle C) = 15^\circ$, iar M este mijlocul laturii $[BC]$. Fie punctul $N \in (BC)$ astfel încât $[NC] \equiv [AB]$. Arătați că $[AN]$ este bisectoarea unghiului MAC .



Soluție. Fie P punctul de intersecție al mediatoarei segmentului $[BC]$ cu AB . Atunci $m(\sphericalangle PCB) = 30^\circ$, $m(\sphericalangle PCA) = 15^\circ$ și $m(\sphericalangle MPC) = 60^\circ$.

Cu teorema bisectoarei, aplicată în triunghiul CPB , avem $\frac{AP}{AB} = \frac{CP}{CB}$.

Cum $PC = PB$ și $NC = AB$, rezultă $\frac{AP}{NC} = \frac{BP}{BC}$, adică $\frac{PA}{PB} = \frac{CN}{CB}$, de unde, conform reciprocei teoremei lui Thales, $AN \parallel PC$ **3p**

Deoarece $PC = 2PM$ (triunghiul MPC este dreptunghic cu un unghi de 30°), avem $\frac{PA}{AB} = \frac{PC}{BC} = \frac{2PM}{2BM} = \frac{PM}{BM}$, deci, conform reciprocei teoremei bisectoarei, rezultă că $[MA]$ este bisectoarea unghiului BMP **2p**

Atunci $45^\circ = m(\sphericalangle AMB) = m(\sphericalangle ANB) + m(\sphericalangle MAN)$, și, cum din $AN \parallel PC$ rezultă $m(\sphericalangle ANB) = 30^\circ$, obținem $m(\sphericalangle MAN) = 15^\circ$. Dar $m(\sphericalangle BAN) = m(\sphericalangle BPC) = 120^\circ$ și, cum $m(\sphericalangle BAC) = 135^\circ$, conchidem că $m(\sphericalangle CAN) = 15^\circ = m(\sphericalangle MAN)$, adică $[AN]$ este bisectoarea unghiului MAC **2p**

Problema 3. Determinați numerele naturale p cu proprietatea că suma primelor p numere naturale nenule este un număr natural de patru cifre având descompunerea în factori primi $2^m \cdot 3^n \cdot (m+n)$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție. Evident, $m+n \geq 5$. Dacă $m+n = 5$, cea mai mare valoare pe care o poate lua numărul $N = 2^m \cdot 3^n \cdot (m+n)$ este $2^1 \cdot 3^4 \cdot 5 = 810$, care nu are patru cifre, contradicție .. **2p**

Presupunând că $m+n \geq 11$, atunci $N \geq 2^{10} \cdot 3 \cdot 11 > 10000$, deci N nu poate avea patru cifre, contradicție **2p**

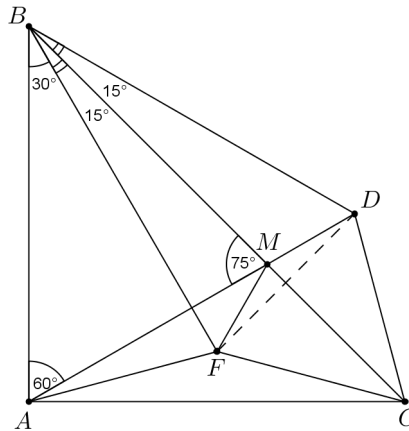
Prin urmare, $m+n = 7$. În acest caz, numere de patru cifre sunt :

$$2^6 \cdot 3^1 \cdot 7 = 1344, 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2016, 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7 = 3024, 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7 = 4536 \text{ și } 2^2 \cdot 3^5 \cdot 7 = 6804.$$

Ținând cont că $N = \frac{p(p+1)}{2}$, analizând cazurile, convine doar $N = 2016$, pentru care se obține $p = 63$ **3 p**

Problema 4. Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC , cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ și punctul $M \in (BC)$ astfel încât $m(\sphericalangle AMB) = 75^\circ$. Pe bisectoarea interioară a unghiului MAC se ia un punct F astfel încât $BF = AB$. Arătați că:

- dreptele AM și BF sunt perpendiculare;
- triunghiul CFM este isoscel.



Soluție. a) Deoarece AMB este unghi exterior triunghiului AMC , rezultă $m(\sphericalangle MAC) = 30^\circ$, de unde $m(\sphericalangle BAM) = 60^\circ$ și $m(\sphericalangle MAF) = 15^\circ$ **1p**

Triunghiul BAF este isoscel, cu $m(\sphericalangle AFB) = m(\sphericalangle BAF) = 75^\circ$, deci $m(\sphericalangle ABF) = 30^\circ$, de unde, ținând cont că $m(\sphericalangle BAM) = 60^\circ$, rezultă că $AM \perp BF$ **1p**

b) Fie punctul D în semiplanul determinat de BC care nu conține pe A astfel încât $BD = BF$ și $m(\sphericalangle MBD) = 15^\circ$. Atunci triunghiul ABD este echilateral, iar punctele A, M și D sunt coliniare **1p**

Triunghiul ADC este isoscel, cu $m(\sphericalangle DAC) = 30^\circ$, de unde $m(\sphericalangle ADC) = 75^\circ = m(\sphericalangle CMD)$. Ca urmare, triunghiul CDM este isoscel, deci $[CM] \equiv [CD]$ **2p**

În triunghiul isoscel BDF , bisectoarea BC este mediatoarea segmentului $[DF]$, deci triunghiul CFD este și el isoscel, de unde $[CF] \equiv [CD] \equiv [CM]$, adică triunghiul CFM este isoscel **2p**