INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A IX-A

1. La un concurs Adolf Haimovici, organizatorii au oferit drept premiu primilor 5 elevi clasați la clasa a IX-a un total de 17 cărți, fiecare elev primind cel puțin o carte.
a) Stabiliți dacă, în mod necesar, cel puțin doi elevi primesc mai mult de câte o carte.
b) Arătați că cel puțin un elev primeşte mai mult de 3 cărți.
c) Determinați în câte moduri se pot distribui premiile, astfel încât fiecare premiant să primească alt număr de cărți.

2. Fie M mulțimea tuturor progresiilor aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$ cu toți termenii numere naturale.
a) Considerând progresia $(a_n)_{n\geq1}\in M$ care are $a_1=6$ și $r=10$, verificați dacă 2016 este sau nu termen al acestei progresii.
b) Determinați câte din progresiile $(a_n)_{n\geq1}\in M$ care au $r=10$, au printre termenii lor numărul 2016.
c) Determinați câte din progresiile $(a_n)_{n\geq1}\in M$ care au $a_1=6$, au printre termenii lor numărul 2016.

3. Fie triunghiul ABC, M mijlocum laturii (BC) și punctele P, Q, R astfel încât $\overrightarrow{AP}=x\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ}=y\cdot\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{AR}=z\cdot\overrightarrow{AC}$, cu $x,\ y,z\in(0;+\infty)$. Arătați că:
a) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$
b) $\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{y}{2}-x\right)\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{y}{2}\cdot\overrightarrow{AC}$
c) Punctele $P,\ Q,\ R$ sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$

4. Un turist parcurge un traseu $ABCD$ format din trei drumuri, AB, BC și CD, toate de aceeași lungime egală cu 60 km. Turistul merge pe drumurile specificate cu vitezele v_1, v_2, respectiv v_3, măsurate în km/h.
a) Dacă $v_1=30$, $v_2=20$ și $v_3=50$, determinați durata t_1 a parcurgerii întregului traseu, măsurată în ore și minute.
b) Dacă turistul ar parcurge întregul traseu cu viteza medie $v=\frac{v_1+v_2+v_3}{3}$ a celor trei viteze de la punctul anterior, determinați durata t_2 a parcurgerii întregului traseu, măsurată în ore și minute.
c) Arătați că, oricare ar fi vitezele v_1, v_2, respectiv v_3, are loc inegalitatea $t_1\geq t_2$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

CLASA A X-A

1. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuațiile:

a) $5^{2x+1}=4\cdot 5^x+1$

b) $x^2+2\sqrt{x^2-3x-4}=3x+4$

c) $\log_4(3x-2)\cdot\log_x 2=1$

2. Venitul lunar al unui tehnoredactor este format din salariul de bază de 800 lei la care se adaugă un spor astfel: dacă reuşeşte să tehnoredacteze până la 200 pagini i se dă un comision de 2 lei pentru fiecare pagină scrisă iar pentru fiecare pagină ce depăşeşte 200 primeşte 3 lei pentru fiecare pagină.

a) Determinați câți bani primeşte tehnoredactorul dacă într-o lună scrie 150 pagini. Dar dacă scrie 250 pagini?

b) Arătați că funcția pe baza căreia se calculează venitul lunar al tehnoredactorului este $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(n)=\begin{cases}2n+800, & \text{dacă } n\le 200\\ 3n+600, & \text{dacă } n>200\end{cases}$,

unde n este numărul de pagini scrise de tehnoredactor.

c) Determinați câte pagini trebuie să scrie tehnoredactorul pentru a câştiga într-o lună 1620 lei.

3. Considerăm numerele complexe $z_a=\dfrac{1-a\cdot i}{1+a\cdot i}$, $a\in\mathbb{R}$, $i^2=-1$.

a) Determinați modulul şi forma algebrică a numărului z_a

b) Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care $z_a=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}\cdot i$

c) Arătați că $\left(z_{\sqrt{3}}\right)^{2016}$ este număr real.

4. a) Arătați că $3\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge(x+y+z)^2$, oricare ar fi $x,y,z\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $3^{2n}>3n+99$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 3$.

c) Determinați numerele naturale n,a,b şi c, ştiind că $a+b+c=3^n$ şi $a^2+b^2+c^2=33+n$.

.

<u>Notă:</u> *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

CLASA A XI-A

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & b\\ c & 1\end{pmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Arătaţi că $A^n=n\cdot A-(n-1)\cdot I_2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

b) Demonstraţi că nu există $X\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3\cdot X-X\cdot A^3=B$.

c) Arătaţi că egalitatea $(A+B)^2=A^2+2\cdot A\cdot B+B^2$ este adevărată dacă şi numai dacă $a\cdot c=0$.

2. Fie funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3+x+1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3e^x-2x+1$. Se cere:

a) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=1$;

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0)\cdot g(x)-g(0)f(x)}{x}$

c) Determinaţi numerele $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care limita $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cdot g(x+1)+b\cdot f(x)}{x}$ există şi este egală cu 2.

3. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}a & a+1 & a+2\\ b & b+1 & b+2\\ 1 & 2 & c\end{pmatrix}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Arătaţi că $\det A=(a-b)(c-3)$.

b) Demonstraţi că pentru $a=3, b=2, c=4$, matricea A este inversabilă şi inversa A^{-1} are toate elementele numere întregi.

c) Determinaţi o matrice $C\in M_3(\mathbb{Z})$, inversabilă şi astfel încât să aibă inversa C^{-1} cu toate elementele numere naturale.

4. O sursă de căldură încălzeşte uniform un corp. Experimental, constatăm că temperatura corpului este dată de legea $T(t)=a\cdot t^b+c-\sqrt{t^2+d\cdot t+25}$, cu $a,b,c,d>0$, unde numărul $t\geq 0$ reprezintă momentul măsurării, exprimat în minute, iar numărul $T(t)$ reprezintă temperatura corpului, exprimată în grade Celsius, la fiecare moment $t\geq 0$ ales. Se ştie că la momentul iniţial $t=0$ temperatura corpului este de 7 grade Celsius iar atunci când $t\to\infty$, temperatura corpului se apropie infinitezimal de 10 grade Celsius, adică $\lim\limits_{t\to\infty}T(t)=10$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

a) Arătați că $c = 12$.

b) Demonstrați că $\lim_{t\to\infty} T(t) = +\infty \cdot \operatorname{sgn}(b-1)$, unde $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, \text{ dacă } x > 0 \\ -1, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$.

c) Arătați că $T(t) = t + 12 - \sqrt{t^2 + 4t + 25}$.

d) Determinați la ce moment t temperatura corpului va fi de 9 grade Celsius.

e) Demonstrați că, la orice moment $t \geq 0$, temperatura corpului este strict mai mică de 10 grade Celsius.

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XII-A

1. Fie funcția $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x)$. Se cere:

a) Determinați primitiva $F:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f, știind că $F(0)=0$.

b) Calculați $\int_0^{e-1} f(x)\,dx$.

c) Dacă $g:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă încât pentru orice $x\ge 0$ se verifică egalitatea $x+\int_0^x g(t)\,dt=(x+1)\cdot g(x)$, arătați că $g=f$.

2. Definim pe mulțimea numerelor reale legea de compoziție $x\circ y=xy+2x+2y$. Se cere:

a) Arătați că legea "$\circ$" nu este asociativă.

b) Cercetați dacă structura algebrică $(\mathbb{R};\circ)$ admite element neutru.

c) Găsiți două numere $a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}$.

d) Demonstrați că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n^3\circ n\ne 2016$.

3. În cadrul unui experiment, o sursă de căldură încălzește un corp astfel încât temperatura corpului, notată $t(x)$ și măsurată în grade Celsius, se modifică la fiecare moment $x\in[0;+\infty)$ al măsurării, exprimat în minute, prin funcția

$$t:[0;+\infty)\to\mathbb{R},\ t(x)=\begin{cases}x^2+x+2, & \text{dacă } x\in[0;3]\\ 5x-1, & \text{dacă } x\in(3;6)\\ 29, & \text{dacă } x\in[6;+\infty)\end{cases}$$

a) Arătați că funcția $t:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ admite primitive și este integrabilă pe orice $[a;b]\subset[0;+\infty)$.

b) Știind că $M(a;b)=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$ exprimă valoarea medie a unei funcții f care este integrabilă pe un interval $[a;b]\subset\mathbb{R}$, calculați temperatura medie înregistrată prin acest experiment pe intervalul momentelor $a=4$ și $b=8$.

c) Determinați după câte minute de la momentul inițial $x_0=0$, temperatura medie înregistrată atinge valoarea de 20 grade Celsius.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

4. Fie mulțimea $M=\left\{a^2-ab+b^2 / a, b\in\mathbb{Z}\right\}$ și numărul complex $\varepsilon=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $i^2=-1$.

a) Arătați că $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$ și $\varepsilon^3=1$

b) Arătați că, pentru orice $a, b\in\mathbb{Z}$, se verifică egalitatea $a^2-ab+b^2=(a+\varepsilon\cdot b)(a+\bar{\varepsilon}\cdot b)$,

unde $\bar{\varepsilon}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ este conjugatul numărului complex $\varepsilon=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

c) Demonstrați egalitatea $\left(a_1^2-a_1b_1+b_1^2\right)\cdot\left(a_2^2-a_2b_2+b_2^2\right)=\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$,

unde $\alpha=a_1a_2-b_1b_2$, $\beta=a_1b_2+a_2b_1-b_1b_2$ și $a_1, b_1, a_2, b_2\in\mathbb{Z}$.

d) Găsiți două numere $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ astfel încât $\left(2016^2-2016\cdot 2015+2015^2\right)^2=\alpha^2-\alpha\cdot\beta+\beta^2$.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. La un concurs Adolf Haimovici, organizatorii au oferit drept premiu primilor 5 elevi clasaţi la clasa a IX-a un total de 17 cărţi, fiecare elev primind cel puţin o carte.

a) Stabiliţi dacă, în mod necesar, cel puţin doi elevi primesc mai mult de câte o carte.

b) Arătaţi că cel puţin un elev primeşte mai mult de 3 cărţi.

c) Determinaţi în câte moduri se pot distribui premiile, astfel încât fiecare premiant să primească alt număr de cărţi.

Soluţie:

a) Nu este necesar. Este posibil ca un elev să primească 13 cărţi şi ceilalţi 4 câte o carte. .... 2 puncte

b) Dacă toţi elevii ar primi cel mult trei cărţi atunci ar fi un total de cel mult 15 cărţi, deci cel puţin un elev primeşte mai mult de trei cărţi. .... 2 puncte

c) Considerând $a<b<c<d<e$, $a\ge 1$, $b\ge 2$, $c\ge 3$, $d\ge 4$, $e\ge 5$, numărul de cărţi primite de cei cinci elevi, rezultă $a+b+c+d+e\ge 1+2+3+4+5=15$ .... 1 punct

şi cum $a+b+c+d+e=17$, rămân două posibilităţi

$(a;b;c;d;e)=(1;2;3;4;7)$ .... 1 punct

şi $(a;b;c;d;e)=(1;2;3;5;6)$ .... 1 punct

2. Fie M mulţimea tuturor progresiilor aritmetice $(a_n)_{n\ge 1}$ cu toţi termenii numere naturale.

a) Considerând progresia $(a_n)_{n\ge 1}\in M$ care are $a_1=6$ şi $r=10$, verificaţi dacă 2016 este sau nu termen al acestei progresii.

b) Determinaţi câte din progresiile $(a_n)_{n\ge 1}\in M$ care au $r=10$, au printre termenii lor numărul 2016.

c) Determinaţi câte din progresiile $(a_n)_{n\ge 1}\in M$ care au $a_1=6$, au printre termenii lor numărul 2016.

Soluţie:

a) $a_n=a_1+(n-1)\cdot r$ .... 1 punct

$a_1=6$, $r=10 \Rightarrow a_n=10n-4$ .... 1 punct

$a_n=2016 \Rightarrow 10n-4=2016 \Rightarrow n=202$, deci $2016=a_{202}$ .... 1 punct

b) $a_1+(n-1)\cdot 10=2016$ .... 1 punct

$a_1=2026-10n\in\mathbb{N} \Rightarrow n\in\{1;2;3;....;202\}$,

deci sunt 202 progresii cu această proprietate .... 1 punct

c) $a_n=6+(n-1)\cdot r=2016 \Rightarrow (n-1)\cdot r=2010=2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$

$r/2010$ .... 1 punct

şi cum 2010 are 16 divizori, sunt 16 progresii cu această proprietate .... 1 punct

3. Fie triunghiul ABC, M mijlocum laturii (BC) și punctele P, Q, R astfel încât $\overrightarrow{AP} = x \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = y \cdot \overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{AR} = z \cdot \overrightarrow{AC}$, cu $x, y, z \in (0; +\infty)$. Arătați că:

a) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

b) $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{y}{2} - x\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{y}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$

c) Punctele P, Q, R sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$

Soluție:

a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ .... 1 punct

b) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}$ .... 1 punct

$\overrightarrow{AQ} = y \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{y}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ .... 1 punct

$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{y}{2} - x\right)\overrightarrow{AB} + \frac{y}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$ .... 1 punct

c) P, Q, R sunt coliniare dacă și numai dacă sunt coliniari vectorii $\overrightarrow{PQ}$ și $\overrightarrow{PR}$ .... 1 punct

$\overrightarrow{PR} = z \cdot \overrightarrow{AC} - x \cdot \overrightarrow{AB}$ .... 1 punct

$\overrightarrow{PQ}$ și $\overrightarrow{PR}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \frac{y - 2x}{-2x} = \frac{y}{2z} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$ .... 1 punct

4. Un turist parcurge un traseu $ABCD$ format din trei drumuri, AB, BC și CD, toate de aceeași lungime egală cu 60 km. Turistul merge pe drumurile specificate cu vitezele v_1, v_2, respectiv v_3, măsurate în km/h.

a) Dacă $v_1 = 30$, $v_2 = 20$ și $v_3 = 50$, determinați durata t_1 a parcurgerii întregului traseu, măsurată în ore și minute.

b) Dacă turistul ar parcurge întregul traseu cu viteza medie $v = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3}$ a celor trei viteze de la punctul anterior, determinați durata t_2 a parcurgerii întregului traseu, măsurată în ore și minute.

c) Arătați că, oricare ar fi vitezele v_1, v_2, respectiv v_3, are loc inegalitatea $t_1 \geq t_2$.

<u>Soluție</u>:

a) $t_1 = \frac{60km}{v_1} + \frac{60km}{v_2} + \frac{60km}{v_3}$ .... 1 punct

$= \ldots = 6h$ și $12\ min$ .... 1 punct

b) $v = \frac{100}{3} km/h \Rightarrow t_2 = \frac{180}{v} = 5h$ și $24\, min$. .... 1 punct

c) $t_1 = 60 \cdot \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right)$ .... 1 punct

$t_2 = 540 \cdot \left(\frac{1}{v_1 + v_2 + v_3}\right)$ .... 1 punct

$t_1 \geq t_2 \Leftrightarrow (v_1 + v_2 + v_3) \cdot \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right) \geq 9$ .... 1 punct

Demonstrarea inegalității .... 1 punct

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuațiile:

a) $5^{2x+1}=4\cdot 5^x+1$

b) $x^2+2\sqrt{x^2-3x-4}=3x+4$

c) $\log_4(3x-2)\cdot\log_x 2=1$

Soluție:

a) $5^x=y\Rightarrow 5y^2-4y-1=0\Rightarrow y_1=1,\ y_2=-\dfrac{1}{5}$ .... 1 punct

$5^x=1\Rightarrow x=0$, $5^x=-\dfrac{1}{5}$ nu are soluție. .... 1 punct

b) $x^2-3x-4\geq 0$, $x\in(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$ .... 1 punct

$x^2-3x-4+2\sqrt{x^2-3x-4}=0\Rightarrow x^2-3x-4=0\Rightarrow x\in\{-1;4\}$ .... 1 punct

c) $x\in\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)\setminus\{1\}$ .... 1 punct

$\log_4(3x-2)=\dfrac{\log_2(3x-2)}{2}$; $\log_x 2=\dfrac{1}{\log_2 x}$ .... 1 punct

și se obține ecuația $x^2-3x+2=0$ cu soluții $x_1=1$ și $x_2=2$ dintre care acceptată de condiția $x\in\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)\setminus\{1\}$ este numai $x=2$ .... 1 punct

2. Venitul lunar al unui tehnoredactor este format din salariul de bază de 800 lei la care se adaugă un spor astfel: dacă reușește să tehnoredacteze până la 200 pagini i se dă un comision de 2 lei pentru fiecare pagină scrisă iar pentru fiecare pagină ce depășește 200 primește 3 lei pentru fiecare pagină.

a) Determinați câți bani primește tehnoredactorul dacă într-o lună scrie 150 pagini. Dar dacă scrie 250 pagini?

b) Arătați că funcția pe baza căreia se calculează venitul lunar al tehnoredactorului este $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(n)=\begin{cases}2n+800, & \text{dacă } n\leq 200\\ 3n+600, & \text{dacă } n>200\end{cases}$,

unde n este numărul de pagini scrise de tehnoredactor.

c) Determinați câte pagini trebuie să scrie tehnoredactorul pentru a câștiga într-o lună 1620 lei.

Soluție:

a) Dacă scrie 150 pagini, câștigă $800+150\cdot 2=1100$ lei .... 1 punct

Dacă scrie 250 pagini, câștigă $800+200\cdot 2+50\cdot 3=1350$ lei .... 2 puncte

b) Dacă $n \le 200 \Rightarrow f(n) = 800 + 2n$ .... 1 punct

Dacă $n > 200 \Rightarrow f(n) = 800 + 200 \cdot 2 + (n-200) \cdot 3 = 3n + 600$ .... 1 punct

c) $n \le 200 \Rightarrow 2n + 800 = 1620 \Rightarrow n = 410$, contradicție .... 1 punct

$n > 200 \Rightarrow 3n + 600 = 1620 \Rightarrow n = 340$, ... 1 punct

3. Considerăm numerele complexe $z_a = \dfrac{1 - a \cdot i}{1 + a \cdot i}$, $a \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.

a) Determinați modulul și forma algebrică a numărului z_a

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $z_a = \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5} \cdot i$

c) Arătați că $\left(z_{\sqrt{3}}\right)^{2016}$ este număr real.

Soluție:

a) $|z_a| = 1$ .... 1 punct

$z_a = \dfrac{1 - a^2}{1 + a^2} - \dfrac{2a}{1 + a^2} \cdot i$ .... 2 puncte

b) $z_a = \dfrac{3}{4} - \dfrac{4}{5} \cdot i \Rightarrow \dfrac{1 - a^2}{1 + a^2} = \dfrac{3}{5}$, $-\dfrac{2a}{1 + a^2} = -\dfrac{4}{5}$ .... 1 punct

$a = \dfrac{1}{2}$ .... 1 punct

c) $\left(z_{\sqrt{3}}\right)^3 = 1 \Rightarrow \left(z_{\sqrt{3}}\right)^{2016} = 1 \in \mathbb{R}$ .... 2 puncte

4. a) Arătați că $3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \ge (x + y + z)^2$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $3^{2n} > 3n + 99$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$.

c) Determinați numerele naturale n, a, b și c, știind că $a + b + c = 3^n$ și $a^2 + b^2 + c^2 = 33 + n$.

Soluție.

a) Inegalitatea este echivalentă cu $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \ge 0$, adevărat .... 1 punct

b) Inductiv: $n = 3$, $3^6 > 108$, adevărat

Dacă $3^{2k} > 3k + 99$, $k \ge 3$, atunci $3^{2k+2} = 3^{2k} \cdot 9 > (3k + 99) \cdot 9 > 3 \cdot (k+1) + 99$ .... 2 puncte

c) Fie a, b, c în condiția cerută, conform cu a) $\Rightarrow 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \ge (a + b + c)^2 \Rightarrow 3(33 + n) \ge 3^{2n}$ și folosind b) $\Rightarrow n \in \{0; 1; 2\}$ .... 2 puncte

Pentru $n = 0$ și $n = 1$ nu avem soluții .... 1 punct

Pentru $n = 2$, $a + b + c = 9$, $a^2 + b^2 + c^2 = 35$, cu soluția $(a; b; c) = (1; 3; 5)$ și orice permutare a acesteia. .... 1 punct

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & b\\ c & 1\end{pmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Arătaţi că $A^n=n\cdot A-(n-1)\cdot I_2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

b) Demonstraţi că nu există $X\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3\cdot X-X\cdot A^3=B$.

c) Arătaţi că egalitatea $(A+B)^2=A^2+2\cdot A\cdot B+B^2$ este adevărată dacă şi numai dacă $a\cdot c=0$.

Soluţie:

a) Verificare prin inducţie. $n=2$, $A^2=2\cdot A-I_2$ .... 1 punct

Dacă $A^k=k\cdot A-(k-1)\cdot I_2$, atunci $A^{k+1}=A^k\cdot A=...=(k+1)\cdot A-k\cdot I_2$ .... 1 punct

b) Presupunem X cu proprietatea cerută, $\Rightarrow$

$$A^3\cdot X-X\cdot A^3=(3\cdot A-2\cdot I_2)\cdot X-X\cdot(3\cdot A-2\cdot I_2)=3\cdot(A\cdot X-X\cdot A)=B\Leftrightarrow A\cdot X-X\cdot A=\frac{1}{3}\cdot B$$

.... 1 punct

$X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a\cdot z & a\cdot(t-x)\\ 0 & -z\cdot a\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & b\\ c & 1\end{pmatrix}$ .... 1 punct

$\Rightarrow a\cdot z=\frac{1}{3}$ şi $a\cdot z=-\frac{1}{3}$, contradicţie .... 1 punct

c) Cum $(A+B)^2=A^2+A\cdot B+B\cdot A+B^2$, cerinţa este echivalentă cu $A\cdot B=B\cdot A$ .... 1 punct

iar $A\cdot B=B\cdot A$ $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix}1+a\cdot c & b+a\\ c & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & b+a\\ c & a\cdot c+1\end{pmatrix}\Leftrightarrow a\cdot c=0$ .... 1 punct

2. Fie funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3+x+1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3e^x-2x+1$. Se cere:

a) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=1$

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(0)\cdot g(x)-g(0)f(x)}{x}$

c) Determinaţi numerele $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care limita $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\cdot g(x+1)+b\cdot f(x)}{x}$ există şi este egală cu 2.

Soluţie:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(2x^2+1)=1$ .... 1 punct

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3e^x-2x-3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3\cdot\dfrac{e^x-1}{x}-2\right)=1$ .... 2 puncte

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0)\cdot g(x)-g(0)f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3\cdot\dfrac{e^x-1}{x}-8x^2-6\right)=-3$ .... 2 puncte

c) Dacă $a\cdot g(1)+b\cdot f(0)\neq 0$, limitelale laterale $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{a\cdot g(x+1)+b\cdot f(x)}{x}$ și

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{a\cdot g(x+1)+b\cdot f(x)}{x}$ sunt fie $+\infty$, fie $-\infty$, deci în mod necesar

$a\cdot g(1)+b\cdot f(0)=0$ .... 1 punct

Dacă $a\cdot g(1)+b\cdot f(0)=0$, atunci $b=-a\cdot(3e-1)$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{a\cdot g(x+1)+b\cdot f(x)}{x}=-a$, din care

rezultă $a=-2$ și $b=6e-2$ .... 1 punct

3. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2\\ b & b+1 & b+2\\ 1 & 2 & c\end{pmatrix}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Arătați că $\det A=(a-b)(c-3)$.

b) Demonstrați că pentru $a=3,\ b=2,\ c=4$, matricea A este inversabilă și inversa A^{-1} are toate elementele numere întregi.

c) Determinați o matrice $C\in M_3(\mathbb{Z})$, inversabilă și astfel încât să aibă inversa C^{-1} cu toate elementele numere naturale.

Soluție:

a) $\det A=(a-b)(c-3)$ .... 2 puncte

b) $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow \det A=1$, deci $\det A\neq 0$, $\Rightarrow$ A inversabilă .... 1 punct

$A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -6 & 1\\ -4 & 7 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$ .... 2 puncte

c) Alegând $C=\begin{pmatrix} 4 & -6 & 1\\ -4 & 7 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow C^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$ .... 2 puncte

4. O sursă de căldură încălzește uniform un corp. Experimental, constatăm că temperatura corpului este dată de legea $T(t)=a\cdot t^b+c-\sqrt{t^2+d\cdot t+25}$, cu $a,b,c,d>0$, unde numărul $t\geq 0$ reprezintă momentul măsurării, exprimat în minute, iar numărul $T(t)$ reprezintă temperatura corpului, exprimată în grade Celsius, la fiecare moment $t\geq 0$ ales. Se știe că la momentul inițial $t=0$ temperatura corpului este de 7 grade Celsius iar atunci când $t\to\infty$, temperatura corpului se apropie infinitezimal de 10 grade Celsius, adică $\lim\limits_{t\to\infty}T(t)=10$.

a) Arătați că $c=12$.

b) Demonstrați că $\lim_{t\to\infty} T(t) = +\infty \cdot \operatorname{sgn}(b-1)$, unde $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, \text{ dacă } x > 0 \\ -1, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$.

c) Arătați că $T(t) = t + 12 - \sqrt{t^2 + 4t + 25}$.

d) Determinați la ce moment t temperatura corpului va fi de 9 grade Celsius.

e) Demonstrați că, la orice moment $t \geq 0$, temperatura corpului este strict mai mică de 10 grade Celsius.

Soluție:

a) $T(0) = 7 \iff c - 5 = 7 \iff c = 12$ .... 1 punct

b) $b > 1 \Rightarrow b - 1 > 0$ și $\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty}\left[t \cdot \left(a \cdot t^{b-1} + \frac{c}{t} - \sqrt{1 + \frac{d}{t} + \frac{25}{t^2}}\right)\right] = \infty \cdot \infty = \infty$ .... 1 punct

$b < 1 \Rightarrow 1 - b > 0$ și $\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty}\left[t \cdot \left(\frac{a}{t^{1-b}} + \frac{c}{t} - \sqrt{1 + \frac{d}{t} + \frac{25}{t^2}}\right)\right] = \infty \cdot (-1) = -\infty$ .... 1 punct

c) Dacă $b = 1$, din $\lim_{t\to\infty} T(t) = 10$, $\lim_{t\to\infty}\left[t \cdot \left(a + \frac{c}{t} - \sqrt{1 + \frac{d}{t} + \frac{25}{t^2}}\right)\right] = 10 \Rightarrow a = 1$ .... 1 punct

și atunci $\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty}\left(t + 12 - \sqrt{t^2 + d \cdot t + 25}\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{t(24-d) + 119}{t + 12 + \sqrt{t^2 + d \cdot t + 25}} = \frac{24-d}{2} = 10$,

deci $d = 4$ .... 1 punct

d) $T(t) = 9 \iff t + 3 = \sqrt{t^2 + 4t + 25} \Rightarrow t = 8$ .... 1 punct

e) $T(t) < 10 \iff t + 2 < \sqrt{t^2 + 4t + 25} \iff t^2 + 4t + 4 < t^2 + 4t + 25$, adevărat .... 1 punct

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Fie funcția $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x)$. Se cere:

a) Determinați primitiva $F:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f, știind că $F(0)=0$.

b) Calculați $\int_0^{e-1} f(x)\,dx$.

c) Dacă $g:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă încât pentru orice $x\ge 0$ se verifică egalitatea $x+\int_0^x g(t)\,dt=(x+1)\cdot g(x)$, arătați că $g=f$.

Soluție:

a) $F(x)=\int \ln(x+1)\,dx=\int (x+1)'\cdot\ln(x+1)\,dx=(x+1)\cdot\ln(x+1)-\int dx=$

$=(x+1)\cdot\ln(x+1)-x+C,\ (\forall)\ C\in\mathbb{R}$ .... 2 puncte

$F(0)=0\ \Rightarrow\ C=0$ .... 1 punct

b) $\int_0^{e-1} f(x)\,dx=F(e-1)-F(0)=1$ .... 2 puncte

c) $G(x)=(x+1)\cdot g(x)-x$ este primitivă a funcției g și $G(0)=0\ \Rightarrow$ deducem $(x+1)\cdot g'(x)=1$ și $g(0)=0$ .... 1 punct

$g(x)=\ln(x+1)$ .... 1 punct

2. Definim pe mulțimea numerelor reale legea de compoziție $x\circ y=xy+2x+2y$. Se cere:

a) Arătați că legea "$\circ$" nu este asociativă.

b) Cercetați dacă structura algebrică $(\mathbb{R};\circ)$ admite element neutru.

c) Găsiți două numere $a, b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}$.

d) Demonstrați că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n^3\circ n\ne 2016$.

Soluție:

a) Spre exemplu, $(0\circ1)\circ2\ne0\circ(1\circ2)$ .... 2 puncte

b) Dacă $e\in\mathbb{R}$ este element neutru, atunci $x\circ e=x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow xe+2x+2e=x\Rightarrow e(x+2)=-x$ .... 1 punct

și folosind unicitatea elementului neutru sau alegând $x=-2\ \Rightarrow\ 0=-2$, rezultă că $(\mathbb{R};\circ)$ nu are element neutru. .... 1 punct

c) Observând $x\circ y=(x+2)(y+2)-4$, se poate alege, spre exemplu, $a=\sqrt{3}-2$, $b=2\sqrt{3}-2$ și cu aceste numere avem $a\circ b=\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}-4=2\in\mathbb{N}$ .... 2 puncte

d) Fie $n^3 \circ n = 2016$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^4 + 2n^3 + 2n = 2016$ și considerând $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^4 + 2n^3 + 2n$, este strict crescătoare. Dar $f(6) < 2016$, $f(7) > 2016$ $\Rightarrow$ $f(n) \neq 2016$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$

.... 1 punct

3. În cadrul unui experiment, o sursă de căldură încălzește un corp astfel încât temperatura corpului, notată $t(x)$ și măsurată în grade Celsius, se modifică la fiecare moment $x \in [0; +\infty)$ al măsurării, exprimat în minute, prin funcția

$$t : [0; +\infty) \to \mathbb{R},\ t(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, & \text{dacă } x \in [0; 3] \\ 5x - 1, & \text{dacă } x \in (3; 6) \\ 29, & \text{dacă } x \in [6; +\infty) \end{cases}$$

a) Arătați că funcția $t : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ admite primitive și este integrabilă pe orice $[a; b] \subset [0; +\infty)$.

b) Știind că $M(a; b) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$ exprimă valoarea medie a unei funcții f care este integrabilă pe un interval $[a; b] \subset \mathbb{R}$, calculați temperatura medie înregistrată prin acest experiment pe intervalul momentelor $a = 4$ și $b = 8$.

c) Determinați după câte minute de la momentul inițial $x_0 = 0$, temperatura medie înregistrată atinge valoarea de 20 grade Celsius.

Soluție:

a) Singurele posibile puncte de discontinuitate sunt $x = 3$ și $x = 6$ și se constată t continuă și în aceste puncte, deci admite primitive .... 1 punct

Fiind continuă pe orice interval $[a; b] \subset [0; +\infty)$, este și integrabilă .... 1 punct

b) Conform cu formula de medie, temperatura medie pentru intervalul momentelor $a = 4$ și $b = 8$

este $M(4; 8) = \frac{1}{4}\int_4^8 t(x)\,dx = \frac{1}{4}\left(\int_4^6 t(x)\,dx + \int_6^8 t(x)\,dx\right)$ .... 1 punct

$\frac{1}{4}\int_4^6 t(x)\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{5x^2}{2} - x\right)\Big|_4^6 = 12$ .... 1 punct

$\frac{1}{4}\int_6^8 t(x)\,dx = \frac{1}{4} \cdot 29x\Big|_6^8 = 14{,}5$, deci $M(4; 8) = 26{,}5$ grade Celsius .... 1 punct

c) Trebuie determinat x astfel încât $M(0; x) = 20$, adică $\frac{1}{x} \cdot \int_0^x t(u)\,du = 20$

$$x \in [0; 3] \Rightarrow M(0; x) = \frac{1}{x}\int_0^x \left(u^2 + u + 2\right)du = \frac{1}{x}\left(\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + 2u\right)\Bigg|_0^x = \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + 2 \leq \frac{13}{2} < 20$$

$x \in (0; 6) \Rightarrow M(0; x) = \frac{1}{x}\int_0^x t(u)\,du = \frac{1}{x}\left[\int_0^3 t(u)\,du + \int_3^x t(u)\,du\right] = \frac{5x}{2} - 1 < 20$ .... 1 punct

$$x \in [6; +\infty) \Rightarrow M(0; x) = \frac{1}{x}\int_0^x t(u)\,du = \frac{1}{x}\left[\int_0^6 t(u)\,du + \int_6^x t(u)\,du\right] = \frac{1}{x}(29x - 90)$$

și ecuația $\frac{1}{x}(29x - 90) = 20$ are soluția $x = 10$ .... 1 punct

4. Fie mulțimea $M=\left\{a^2-ab+b^2 \,/\, a,\, b\in\mathbb{Z}\right\}$ și numărul complex $\varepsilon=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $i^2=-1$.

a) Arătați că $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$ și $\varepsilon^3=1$

b) Arătați că, pentru orice $a,\, b\in\mathbb{Z}$, se verifică egalitatea $a^2-ab+b^2=(a+\varepsilon\cdot b)\left(a+\overline{\varepsilon}\cdot b\right)$,

unde $\overline{\varepsilon}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ este conjugatul numărului complex $\varepsilon=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

c) Demonstrați egalitatea $\left(a_1^2-a_1b_1+b_1^2\right)\cdot\left(a_2^2-a_2b_2+b_2^2\right)=\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$,

unde $\alpha=a_1a_2-b_1b_2$, $\beta=a_1b_2+a_2b_1-b_1b_2$ și $a_1,\, b_1,\, a_2,\, b_2\in\mathbb{Z}$.

d) Găsiți două numere $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ astfel încât $\left(2016^2-2016\cdot 2015+2015^2\right)^2=\alpha^2-\alpha\cdot\beta+\beta^2$.

<u>Soluție</u>:

a) Justifică $\varepsilon^2-\varepsilon+1=0$ și $\varepsilon^3=1$ .... 1 punct

b) $(a+\varepsilon\cdot b)\left(a+\overline{\varepsilon}\cdot b\right)=a^2+\left(\varepsilon+\overline{\varepsilon}\right)\cdot ab+\left(\varepsilon\cdot\overline{\varepsilon}\right)\cdot b^2=a^2-ab+b^2$ .... 2 puncte

c) Se demonstrează implicația $x,\ y\in M\ \Rightarrow\ x\cdot y\in M$

$x=a_1^2-a_1b_1+b_1^2=(a_1+\varepsilon\cdot b_1)\left(a_1+\overline{\varepsilon}\cdot b_1\right)$, $y=a_2^2-a_2b_2+b_2^2=(a_2+\varepsilon\cdot b_2)\left(a_2+\overline{\varepsilon}\cdot b_2\right)$ .... 1 punct

$\Rightarrow\ x\cdot y=(a_1+\varepsilon\cdot b_1)(a_2+\varepsilon\cdot b_2)\cdot\overline{(a_1+\varepsilon\cdot b_1)(a_2+\varepsilon\cdot b_2)}=$ .... 1 punct

$=(\alpha+\varepsilon\cdot\beta)\cdot\overline{(\alpha+\varepsilon\cdot\beta)}=\alpha^2-\alpha\cdot\beta+\beta^2$, cu $\alpha=a_1a_2-b_1b_2$, $\beta=a_1b_2+a_2b_1-b_1b_2$ .... 1 punct

d) Folosim punctul c) pentru $a_1=a_2=2016$, $b_1=b_2=2015$ și obținem $\alpha=4031$, $\beta=2015\cdot 2017$
.... 1 punct

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A IX-A

1. Dorin are o grădină care trebuie săpată. El îi tocmeşte pe Ion şi pe Vasile, doi muncitori la fel de harnici. Ion munceşte 9 ore, iar Vasile 15 ore. Pentru munca sa, Vasile primeşte cu 90 lei mai mult decât Ion.

a) Ce sumă primeşte fiecare dintre cei doi muncitori?

b) Suprafața săpată de Ion în 9 ore are forma unui pătrat cu latura de 9 metri. De cât timp are nevoie Ion pentru a săpa o suprafață având forma unui pătrat cu latura de 3 metri?

2. Pe latura *CD* a dreptunghiului *ABCD* se consideră punctele *P* şi *Q* astfel încât $DP = PQ = QC$. Definim punctele *R* şi *S* prin $2\overrightarrow{AR} = 3\overrightarrow{AP}$, respectiv $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AR}$.

a) Demonstrați că punctele *A*, *C* şi *S* sunt coliniare.

b) Arătați că *Q* este centrul de greutate al triunghiului *ARS*.

3. Se consideră numerele reale *a*, *b* şi *c* astfel încât $a \le b \le c$, $a+b+c=1$ şi $a^2+b^2+c^2=1$.

a) Demonstrați că $b \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$.

b) Găsiți trei numere reale, distincte două câte două, având proprietățile din enunț.

4. Pentru fiecare număr natural *m*, se consideră mulțimea $A_m = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid |2x-1| + |3x-1| = m\right\}$.

a) Determinați A_0.

b) Demonstrați că, oricare ar fi numărul natural *m*, mulțimea A_m are cel mult un element.

c) Dacă *n* este un număr întreg oarecare, arătați că există un număr natural *m* pentru care $n \in A_m$.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A X-A

1. a) Demonstrați că $\left(29\sqrt{2}+41\right)\cdot\left(29\sqrt{2}-41\right)=1$

b) Calculați $\left(1+\sqrt{2}\right)^2;\left(1+\sqrt{2}\right)^3$ şi $\left(1+\sqrt{2}\right)^5$

c) Determinați $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$ pentru care are loc egalitatea $\sqrt[n]{29\sqrt{2}+41}-\sqrt[n]{29\sqrt{2}-41}=2$.

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_2\left(x^2+4\right)-\log_2 x=4x-x^2-2$.

3. Determinați mulțimea $M=\left\{(x,y)\in\mathcal{P} \mid \text{Re}\left(\frac{z-2}{z-4i}\right)=0\right\}$.

Reprezentați geometric mulțimea *M*. (unde $z=x+yi, \mathcal{P}$ - planul complex)

4. La un turneu de fotbal în sală participă 15 echipe, fiecare jucând o singură dată cu fiecare dintre celelalte echipe. Pentru victorie se acordă echipei câştigătoare 3 puncte, pentru meci egal câte 2 puncte pentru fiecare echipă, iar pentru înfrângere 1 punct. În clasamentul întocmit la sfârşitul turneului nu există echipe cu acelaşi număr de puncte, iar echipa clasată pe ultimul loc are 21 puncte.

a) Care este numărul de meciuri disputate în cadrul turneului ?

b) Care este numărul total de puncte acordate la toate meciurile ?

c) Să se demonstreze că prima clasată a făcut cel puțin un meci egal.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A XI-A

1. În fiecare din cele 9 căsuţe ale unei table de latura 3 este scrisă cifra 0. Se alege un pătrat de latură 2 şi se măreşte numărul scris în fiecare din cele 4 căsuţe cu o unitate. Folosind repetat acest procedeu putem obţine configuraţia alăturată ? (Suma tuturor numerelor din configuraţie nu este multiplu de 4).

4	9	6
7	24	11
6	12	8

2. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+aA; a\in\mathbb{R}$. Demonstraţi că $X(a)$ este inversabilă dacă şi numai dacă $a\neq -1$ şi calculaţi $X^{-1}(1)\cdot X(2)\cdot X^{-1}(3)\cdot X(4)\cdot\ldots\cdot X^{-1}(2013)\cdot X(2014)\cdot$

3. Fie A, B, C puncte necoliniare în plan având coordonate întregi. Să se arate că aria ΔABC este mai mare sau egală cu $\frac{1}{2}$.

4. a) Precizaţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false:

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$; ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x+\pi)}{x+\pi}=1$. Justificare.

b) Să se calculeze raportul $\frac{a}{b}$ ştiind că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(ax)-\sin(ax)}{\operatorname{tg}(bx)-\sin(bx)}=2016^3$.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A XII-A

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{A(k)=\begin{pmatrix}2^k & 0 & 2^k\\ 0 & 0 & 0\\ 2^k & 0 & 2^k\end{pmatrix}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

a) Să se arate că pentru orice m,n întregi, are loc: $A(m)\cdot A(n)=A(m+n+1)$

b) Să se demonstreze că $(G,\cdot)$ este un grup abelian, unde "·" reprezintă înmulțirea matricelor;

c) Dacă mulțimea $H\neq\{A(-1)\}$ este un subgrup al grupului (G,·), să se demonstreze că H are cel puțin 2016 elemente.

2. Considerăm funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+e^x$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

a) Arătați că funcția F este bijectivă;

b) Calculați $\int_0^{e-\frac{2}{3}} F^{-1}(x)\,dx$.

3. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$, definim legea de compoziție $x*y=xy+5x+5y+20$. Se admite faptul că $G=(-5,\infty)$ împreuna cu legea de compoziție "*" are o structură algebrică de grup.

a) Să se arate că grupurile $(G,*)$ şi $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ sunt izomorfe;

b) Să se calculeze -2016 * (-2015) *… *(-1)*0*1* … * 2015 *2016;

c) Se consideră mulțimea $H=\{a^2-5, a\in\mathbb{Q}\}$. Să se arate că (H,*) este un subgrup al grupului (G,*).

4. Pentru orice n număr natural nenul, se consideră numerele $I_n=\int\frac{\sin(nx)}{\sin(x)}dx, \forall x\in(0,\pi)$.

a) Să se demonstreze că $I_{n+2}=I_n+\frac{2\sin(n+1)x}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$;

b) Să se determine funcția $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$, ştiind că $f'(x)\cdot\sin x=\sin 5x$ şi $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Dorin are o grădină care trebuie săpată. El îi tocmeşte pe Ion şi pe Vasile, doi muncitori la fel de harnici. Ion munceşte 9 ore, iar Vasile 15 ore. Pentru munca sa, Vasile primeşte cu 90 lei mai mult decât Ion.
a) Ce sumă primeşte fiecare dintre cei doi muncitori?
b) Suprafața săpată de Ion în 9 ore are forma unui pătrat cu latura de 9 metri. De cât timp are nevoie Ion pentru a săpa o suprafață având forma unui pătrat cu latura de 3 metri?

Soluție.
Vasile munceşte cu 6 ore în plus față de Ion, prin urmare retribuția pentru o oră de muncă este de $90:6=15$ lei. .... 2 puncte
Ion primeşte $9\cdot 15=135$ lei, iar Vasile primeşte $15\cdot 15=225$ lei. .... 2 puncte
Un pătrat cu latura de 3 m are aria de nouă ori mai mică decât cea a unui pătrat cu latura de 9 m. Timpul necesar va fi de nouă ori mai mic, deci Ion are nevoie de 1 oră .... 3 puncte

2. Pe latura CD a dreptunghiului $ABCD$ se consideră punctele P şi Q astfel încât $DP=PQ=QC$. Definim punctele R şi S prin $2\overrightarrow{AR}=3\overrightarrow{AP}$, respectiv $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AR}$.
a) Demonstrați că punctele A, C şi S sunt coliniare.
b) Arătați că Q este centrul de greutate al triunghiului ARS.

Soluție.
a) $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$,
prin urmare punctele A, C şi S sunt coliniare. .... 4 puncte
b) Dacă M este mijlocul lui RS, ar trebui să dovedim că $\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AS}\right)$. Însă Q este mijlocul lui PC, prin urmare $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AS}\right)$, de unde concluzia problemei
.... 3 puncte

3. Se consideră numerele reale *a*, *b* şi *c* astfel încât $a \le b \le c$, $a+b+c=1$ şi $a^2+b^2+c^2=1$.

a) Demonstraţi că $b \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$.

b) Găsiţi trei numere reale, distincte două câte două, având proprietăţile din enunţ.

Soluţie.

a) Dacă, prin absurd, $b<0$, vom avea şi $a<0$. Rezultă că $c=1-a-b>1$, prin urmare a^2+b^2+ $+c^2>0+0+1=1$, contradicţie. .... 2 puncte

Dacă, prin absurd, $b>\frac{2}{3}$, vom avea şi $c>\frac{2}{3}$. Rezultă că $a=1-b-c<-\frac{1}{3}$, prin urmare a^2+b^2+ $+c^2>\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=1$, contradicţie. .... 2 puncte

b) Considerăm, de exemplu, $b=\frac{1}{3}$. Obţinem că $a+c=\frac{2}{3}$ şi $a^2+c^2=\frac{8}{9}$; rezolvând prin metoda substituţiei acest sistem, obţinem pentru *a* şi *c* valorile $a=\frac{1-\sqrt{3}}{3}$, $c=\frac{1+\sqrt{3}}{3}$. .... 3 puncte

4. Pentru fiecare număr natural *m*, se consideră mulţimea $A_m=\{x\in\mathbb{Z} \mid |2x-1|+|3x-1|=m\}$.

a) Determinaţi A_0.

b) Demonstraţi că, oricare ar fi numărul natural *m*, mulţimea A_m are cel mult un element.

c) Dacă *n* este un număr întreg oarecare, arătaţi că există un număr natural *m* pentru care $n\in A_m$.

Soluţie.

a) $A_0=\varnothing$ .... 2 puncte

b) Dacă $x\le 0$, ecuaţia ale cărei soluţii constituie mulţimea A_m devine $5x=2-m$. Cum $x\in\mathbb{Z}$, soluţia corespunzătoare este convenabilă dacă şi numai dacă $m=5n+2, n\in\mathbb{N}$, caz în care $-n\in A_m$.

Dacă $x\ge 1$, ecuaţia ale cărei soluţii constituie mulţimea A_m devine $5x=2+m$. Cum $x\in\mathbb{Z}$, soluţia corespunzătoare este convenabilă dacă şi numai dacă $m=5n+3, n\in\mathbb{N}$, caz în care $n+1\in A_m$.

.... 3 puncte

Întrucât un număr nu poate da simultan restul 2 şi restul 3 la împărţirea prin 5, rezultă că A_m este fie vidă, fie conţine exact un element. .... 1 punct

c) Am observat că $-n\in A_{5n+2}$ şi $n+1\in A_{5n+3}$, oricare ar fi numărul natural *n*, de unde cerinţa problemei .... 1 punct

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA A X-A

1. a) Demonstrați că $\left(29\sqrt{2}+41\right)\cdot\left(29\sqrt{2}-41\right)=1$

b) Calculați $\left(1+\sqrt{2}\right)^2;\left(1+\sqrt{2}\right)^3$ și $\left(1+\sqrt{2}\right)^5$

c) Determinați $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$ pentru care are loc egalitatea $\sqrt[n]{29\sqrt{2}+41}-\sqrt[n]{29\sqrt{2}-41}=2$.

Soluție.

a) $\left(29\sqrt{2}+41\right)\cdot\left(29\sqrt{2}-41\right)=1682-1681=1$ .... 1 punct

b) $\left(1+\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{2};\left(1+\sqrt{2}\right)^3=7+5\sqrt{2};\left(1+\sqrt{2}\right)^5=41+29\sqrt{2}$ .... 2 puncte

c) Notăm $\sqrt[n]{29\sqrt{2}+41}=a, a>0\ \Rightarrow\sqrt[n]{29\sqrt{2}-41}=\frac{1}{a}$ .... 1 punct

Ecuația devine $a-\frac{1}{a}=2\Rightarrow a^2-2a-1=0$, cu soluțiile $a_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$

Cum $a>0\Rightarrow a=1+\sqrt{2}$ .... 1 punct

$\sqrt[n]{29\sqrt{2}+41}=1+\sqrt{2}\Rightarrow 29\sqrt{2}+41=\left(1+\sqrt{2}\right)^n\Rightarrow$ .... 1 punct

$\left(1+\sqrt{2}\right)^5=\left(1+\sqrt{2}\right)^n\Rightarrow n=5$ .... 1 punct

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_2\left(x^2+4\right)-\log_2 x=4x-x^2-2$.

Soluție.

Condițiile de existență, $x>0$ .... 1 punct

$\log_2\frac{x^2+4}{x}=4x-x^2-2\Rightarrow\log_2\frac{x^2+4}{x}-2=4x-x^2-4\Rightarrow 2-\log_2\frac{x^2+4}{x}=x^2-4x-4\Rightarrow$

.... 2 puncte

$\log_2 4-\log_2\frac{x^2+4}{x}=x^2-4x+4\Rightarrow\log_2 4-\log_2\frac{x^2+4}{x}=\left(x-2\right)^2\Rightarrow\log_2\frac{4x}{x^2+4}=\left(x-2\right)^2\ (1)$

.... 2 puncte

Observăm că $\left(x-2\right)^2\geq 0,\forall x>0,$ iar $\frac{4x}{x^2+4}\leq 1,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\log_2\frac{4x}{x^2+4}\leq\log_2 1\Rightarrow\log_2\frac{4x}{x^2+4}\leq 0$.

.... 1 punct

Egalitatea (1) nu poate avea loc decât dacă ambii membri sunt nuli:

$\frac{4x}{x^2+4}=1$ și $\left(x-2\right)^2=0\Rightarrow x=2$

.... 1 punct

3. Determinați mulțimea $M=\left\{(x,y)\in\mathcal{P} \mid \operatorname{Re}\left(\frac{z-2}{z-4i}\right)=0\right\}$.

Reprezentați geometric mulțimea *M*. (unde $z=x+yi, \mathcal{P}$ - planul complex)

Soluție.

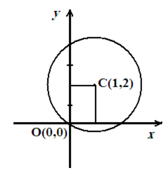
$\frac{z-2}{z-4i}=\frac{x+iy-2}{x+iy-4i}=\frac{x-2+iy}{x+i(y-4)}=\frac{x(x-2)+y(y-4)+ixy-i(y-4)(x-2)}{x^2+(y-4)^2}$ .... 2 puncte

$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{z-2}{z-4i}\right)=0 \Leftrightarrow x(x-2)+y(y-4)=0 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2-4y=0$ .... 2 puncte

$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)=5$ .... 1 punct

$(x-1)^2+(y-2)^2=5 \Rightarrow M=\left\{(x,y)\in\mathcal{P} \mid (x-1)^2+(y-2)^2=5\right\}$. .... 1 punct

Imaginea geometrică a elementelor mulțimii *M* este cercul de centru $C(1,2)$ şi rază $r=\sqrt{5}$.



.... 1 punct

4. La un turneu de fotbal în sală participă 15 echipe, fiecare jucând o singură dată cu fiecare dintre celelalte echipe. Pentru victorie se acordă echipei câştigătoare 3 puncte, pentru meci egal câte 2 puncte pentru fiecare echipă, iar pentru înfrângere 1 punct. În clasamentul întocmit la sfârşitul turneului nu există echipe cu acelaşi număr de puncte, iar echipa clasată pe ultimul loc are 21 puncte.

a) Care este numărul de meciuri disputate în cadrul turneului ?
b) Care este numărul total de puncte acordate la toate meciurile ?
c) Să se demonstreze că prima clasată a făcut cel puțin un meci egal.

Soluție.

a) Fiecare echipă a disputat 14 meciuri. Numărul de meciuri disputate a fost $C_{15}^2=\frac{15\cdot 14}{2}=105$
.... 1 punct

b) Cum la fiecare meci s-au acordat exact 4 puncte, deducem că numărul total de puncte acordate a fost $105\cdot 4=420$ .... 1 punct

c) Cum ultima clasată are 21 puncte, iar în clasament nu sunt echipe cu acelaşi număr de puncte, rezultă că numărul total de puncte este cel puțin $21+(21+1)+(21+2)+(21+3)+\ldots+(21+14)=$

$=21\cdot 15+\frac{14\cdot 15}{2}=420$ .... 2 puncte

Din acest raționament deducem că echipele au punctajele: 21, 22, 23, ..., 35 .... 1 punct

Presupunem că echipa situată pe primul loc nu a făcut nici un meci egal şi notăm cu *x* numărul victoriilor şi cu *y* numărul înfrângerilor .... 1 punct

Obținem: $\begin{cases} x+y=14 \\ 3x+y=35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{21}{2}\notin\mathbb{N} \\ y=\frac{7}{2}\notin\mathbb{N} \end{cases}$ .... 1 punct

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. În fiecare din cele 9 căsuţe ale unei table de latura 3 este scrisă cifra 0. Se alege un pătrat de latură 2 şi se măreşte numărul scris în fiecare din cele 4 căsuţe cu o unitate.
Folosind repetat acest procedeu putem obţine configuraţia alăturată ?
(Suma tuturor numerelor din configuraţie nu este multiplu de 4).

4	9	6
7	24	11
6	12	8

Soluţie.
La fiecare alegere a unui pătrat 2×2 se măreşte suma numerelor cu 4, aşadar suma tuturor numerelor trebuie să fie multiplu de 4 .... 4 puncte
În tabla dată suma numerelor nu este multiplu de 4, deci nu se poate ajunge la configuraţia cerută
.... 3puncte

2. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ şi $X(a) = I_2 + aA; a \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că $X(a)$ este inversabilă dacă şi numai dacă $a \neq -1$ şi calculaţi $X^{-1}(1) \cdot X(2) \cdot X^{-1}(3) \cdot X(4) \cdot \ldots \cdot X^{-1}(2013) \cdot X(2014) \cdot$

(Meda Bujor, Supliment Gazeta Matematică – septembrie 2015)

Soluţie.

$\det X(a) = \begin{vmatrix} 1-a & -a \\ 2a & 1+2a \end{vmatrix} = 1+a$ .... 2 puncte

$X(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det X(a) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$ .... 1 punct

$X^{-1}(a) = X\left(-\frac{a}{1+a}\right), \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .... 1 punct

$X^{-1}(n) \cdot X(n+1) = X\left(\frac{1}{n+1}\right); \forall n \in \mathbb{N}^*$ .... 1 punct

$X(a_1) \cdot X(a_2) \cdot X(a_3) \cdot \ldots \cdot X(a_n) = X\left((1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) - 1\right), \forall a_1, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ .... 1 punct

Finalizare .... 1 punct

3. Fie A, B, C puncte necoliniare în plan având coordonate întregi.
Să se arate că aria ΔABC este mai mare sau egală cu $\frac{1}{2}$.

Soluţie.

Aria $\Delta ABC = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}\right|$ .... 3 puncte

$\left|\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}\right| \in \mathbb{N}^*$ .... 2 puncte

Aria $\Delta ABC \geq \frac{1}{2}$ .... 2 puncte

4. a) Precizați dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$; ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x+\pi)}{x+\pi} = 1$. Justificare.

b) Să se calculeze raportul $\frac{a}{b}$ ştiind că $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(ax) - \sin(ax)}{\mathrm{tg}(bx) - \sin(bx)} = 2016^3$.

Soluție.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ şi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x+\pi)}{x+\pi} = 0$. Aşadar ambele afirmații sunt false .... 4 puncte

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(ax) - \sin(ax)}{\mathrm{tg}(bx) - \sin(bx)} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$ .... 2 puncte

Finalizare $\frac{a}{b} = 2016$ .... 1 punct

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Se consideră mulţimea $G=\left\{A(k)=\begin{pmatrix}2^k & 0 & 2^k\\ 0 & 0 & 0\\ 2^k & 0 & 2^k\end{pmatrix}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

a) Să se arate că pentru orice m,n întregi, are loc: $A(m)\cdot A(n)=A(m+n+1)$

b) Să se demonstreze că $(G,\cdot)$ este un grup abelian, unde "·" reprezintă înmulţirea matricelor;

c) Dacă mulţimea $H\neq\{A(-1)\}$ este un subgrup al grupului (G,·), să se demonstreze că H are cel puţin 2016 elemente.

Soluţie.

a) $A(m)\cdot A(n)=\begin{pmatrix}2^{m+n+1} & 0 & 2^{m+n+1}\\ 0 & 0 & 0\\ 2^{m+n+1} & 0 & 2^{m+n+1}\end{pmatrix}$ .... 1 punct

b) Element neutru $A(-1)$ .... 1 punct
Verificarea celorlalte axiome .... 1 punct
c) Daca $H\neq\{A(-1)\}$ este un subgrup atunci exista $A(k)$ in H cu $k\in\mathbb{Z}-\{-1\}$ de unde rezultă
$(A(k))^n$ este în H, pentru orice n număr natural nenul .... 1 punct
$(A(k))^n = A(nk+n-1)$ .... 1 punct
$x_n = nk + n - 1$ este un şir strict crescător .... 1 punct
H are cel puţin 2016 elemente .... 1 punct

2. Considerăm funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+e^x$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

a) Arătaţi că funcţia F este bijectivă;

b) Calculaţi $\int_0^{e-\frac{2}{3}} F^{-1}(x)\,dx$.

Soluţie.
a) F bijectivă ↔ F injectivă şi F surjectivă .... 1 punct

$F(x)^{'} = f(x) = x^2 + e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ F strict crescătoare, deci F injectivă .... 1 punct

F continuă, deci F are proprietatea lui Darboux; $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty; \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$, deci F este surjectivă .... 1 punct

b) Facem substituția $x = F(t)$, de unde $dx = f(t)dt$; $x_1 = 0$ deci $t_1 = 0$ şi $x_2 = e - \frac{2}{3}$ deci $t_2 = 1$
.... 2 puncte

$\int_0^{e-\frac{2}{3}} F^{-1}(x)dx = \int_0^1 tf(t)dt = \frac{5}{4}$ .... 2 puncte

3. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$, definim legea de compoziție $x * y = xy + 5x + 5y + 20$. Se admite faptul că $G = (-5, \infty)$ împreuna cu legea de compoziție "*" are o structură algebrică de grup.

a) Să se arate că grupurile $(G,*)$ şi $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sunt izomorfe;

b) Să se calculeze -2016 * (-2015) *… *(-1)*0*1* … * 2015 *2016;

c) Se consideră mulțimea $H = \{a^2 - 5, a \in \mathbb{Q}\}$. Să se arate că (H,*) este un subgrup al grupului (G,*).

Soluție.

a) $f(x) = x + 5$, f :(-5,∞)→(0,∞) .... 2 puncte

b) $-5 \in \mathbb{R}$ element absorbant, de unde -2016 * (-2015) *… *(-1)*0*1* … *2015*2016 = -5
.... 2 puncte

c) $x * y = (ab)^2 - 5 \in$ H .... 2 puncte

$x^{-1} \in$ H .... 1 punct

4. Pentru orice n număr natural nenul, se consideră numerele $I_n = \int \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} dx, \forall x \in (0, \pi)$.

a) Să se demonstreze că $I_{n+2} = I_n + \frac{2\sin(n+1)x}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) Să se determine funcția $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, ştiind că $f^{'}(x) \cdot \sin x = \sin 5x$ şi $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Soluție.

a) $I_{n+2} - I_n = \int \frac{\sin(n+2)x - \sin x}{\sin x} dx = 2\int \cos(n+1)x dx = 2\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + C$
.... 3 puncte

b) $f^{'}(x) = \frac{\sin 5x}{\sin x} \Rightarrow f(x) = I_5$
.... 1 punct

$I_5 = I_3 + \frac{2\sin 4x}{4} = I_1 + \frac{2\sin 2x}{2} + \frac{2\sin 4x}{4} = x + \sin 2x + \frac{\sin 4x}{2} + C$
.... 2 puncte

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow C = -\frac{\pi}{2}$ .... 1 punct

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016
Profil Tehnic

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A IX-A

1. Se consideră funcţia $f : R \to R, f(x) = \left(a^2 - a + 1\right)x + 1,$ unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Demonstraţi că $a^2 - a + 1 > 0,\ \forall a \in \mathbb{R}$

b) Demonstraţi că $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$.

c) Comparaţi numerele $f(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ şi $f\left(\sqrt{2} + 2\right)$.

2. Fie pătratul $ABCD$ de latura 4 , în care $AC \cap BD = \{O\}$ şi M este mijlocul segmentului $[BO]$.

Considerăm punctul N astfel încât $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{DO}$.

a) Demonstraţi că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$.

b) Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO}$, utilizând eventual formula medianei $m_a^2 = \dfrac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}$.

c) Demonstraţi că punctele A, M, N sunt puncte coliniare.

3. Fie $\left(a_n\right)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu raţia $a_1 \neq 0$.

a) Demonstraţi că $a_1 + a_2 + ... + a_n = \dfrac{a_1 \cdot n\left(n+1\right)}{2},\ \forall n \geq 1$.

b) Verificaţi relaţia $\dfrac{a_1}{a_1 + a_2 + ... + a_n} = 2\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right), \forall n \geq 1$.

c) Demonstraţi că $S = \dfrac{a_1}{a_1 + a_2} + \dfrac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} + ... + \dfrac{a_1}{a_1 + a_2 + ... + a_n} = \dfrac{2n}{n+1},\ \forall n \geq 1$.

4. a) Demonstraţi că $1 + 3 + 5 + ... + \left(2n - 1\right) = n^2, \forall n \geq 1$

b) La un stadion cu capacitatea de 10000 de locuri vin spectatorii. În primul minut vine 1 spectator, în al doilea minut vin 3 spectatori, în al treilea minut vin 5 spectatori , etc. După câte minute stadionul se va umple ?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016
Profil Tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

1. Rezolvați în mulțimea R ecuațiile :

a) $3^{\frac{1}{x}} - 3 = 2 \cdot 3^{\frac{1}{2x}}$,

b) $\log_3 x \cdot \log_{x+6} 9 = 1$.

2. Fie $z \in \mathbb{C}$ un număr complex astfel încât $z^2 + 2z + 4 = 0$.

a) Demonstrați că z^3 este număr real.

b) Calculați $z^{2016} + 2 \cdot z^{2015} + 2^2 \cdot z^{2014} + 2^3 \cdot z^{2013} + ... + 2^{2015} \cdot z + 2^{2016}$.

3. Trei elevi au intrat într-un magazin pentru a cumpăra câte ceva. Primul elev a cumpărat 4 sandviciuri, o cană de ceai şi 10 gogoşi, plătind în total 16,90 lei. Al doilea elev a cumpărat 3 sandviciuri, o cană de ceai şi 7 gogoşi, plătind 12,60 lei. Cât va plăti al treilea elev pentru un sandvici, o cană de ceai şi o gogoaşă ?

4. În toate pătrățelele 1×1 ale unei table de dimensiuni 3×4 sunt scrise numere astfel încât numerele din fiecare linie şi fiecare coloană formează câte o progresie aritmetică. Ştiind că suma celor patru numere din colțurile tablei este 672, să se determine suma numerelor de pe tablă.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016
Profil Tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XI-A

1. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\det\left(A\cdot A^T-x\cdot I_2\right)$, unde A^T - reprezintă transpusa matricei A.

a) Demonstraţi că $f(0)\geq 0$.

b) Găsiţi $a,b,c\in\mathbb{R}$ dacă $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(-n)+f(-n+1)+...+f(n-1)+f(n)-2n-1}{n^3}\right)$

2. O matrice de ordinul al doilea, având elementele din mulţimea $\{0,1,2\}$, se numeşte ***echilibrată*** dacă oricare două elemente aflate pe aceeaşi linie şi aceeaşi coloană sunt numere consecutive. De exemplu $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ este matrice ***echilibrată.***

a) Justificaţi că matricea I_2 este matrice ***echilibrată.***

b) Câte matrice ***echilibrate*** se pot construi ?

c) Justificaţi că transpusa oricărei matrice echilibrate este tot o matrice ***echilibrată***.

3. a) Fie $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{mx^2+nx+p}{x+q}, m,n,p,q\in\mathbb{R}, D\subset\mathbb{R}.$

Să se determine $m,n,p,q\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcţiei *f* să admită asimptotele $x=2$ şi $y=3x-1$, iar $A(1,3)$ să fie punct al graficului.

b) Considerăm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $\left|f(x)-\sin^3 2x\right|\leq x^4$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

Calculaţi $\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

4. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

a) Demonstraţi că $A^4=B^3$.

b) Determinaţi matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât să avem $AX+XB=I_2$.

c) Verificaţi egalitatea $AB+C+I_2=O_2$, unde $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi apoi demonstraţi că $(AB)^n\neq I_2, (\forall)n\geq 1$

<u>Notă:</u> *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016
Profil Tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XII-A

1. Fie (G,·) un grup multiplicativ cu elementul neutru e. Demonstrați că :

a) $(a^{-1}ba)^3 = a^{-1}b^3a$, oricare ar fi $a,b \in G$.

b) Dacă $a,b \in G$ astfel încât $a^{-2}ba^2 = e$ şi $a\ ba^{-2} = b^3$, atunci $a = b = e$.

2. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(\cos^2 x + 2016) + 1$. Se cere:

a) Arătați că $f(x) - f'(x) = e^x \sin 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $I = \int \frac{\sin 2x + e^{-x}}{e^{-x} + \cos^2 x + 2016} dx.$

3. Fie matricele $X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$ şi

mulțimea $G = \left\{ M(r) \mid M(r) = I_2 + rX, r \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right\}$

a) Calculați X^2, X^3.

b) Arătați că $M(r) \cdot M(s) \in G$, pentru orice $M(r), M(s) \in G$.

c) Arătați că (G,·) este grup comutativ.

d) Rezolvați ecuația $(M(r))^3 = I_2 + 13X$, unde $M(r) \in G$.

4. Se consideră integrala nedefinită $I(x,n) = \int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) + n} dx,$

unde $x \in (0, +\infty)$ şi $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculați $I(x,0)$.

b) Calculați $I(x,1)$.

c) Calculați $I(x,n)$, pentru $n \geq 2$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Se consideră funcția $f: R \to R, f(x)=\left(a^2-a+1\right)x+1,$ unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $a^2-a+1>0,\ \forall a\in\mathbb{R}$

b) Demonstrați că $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}>0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}, x\neq y$.

c) Comparați numerele $f(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ şi $f\left(\sqrt{2}+2\right)$.

Soluție:

a) Obține $a^2-a+1=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0,\ \forall a\in\mathbb{R}$ .... 2 puncte

b) Obține $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=a^2-a+1>0,\ \forall a\in\mathbb{R}$ .... 3 puncte

c) Pentru $x=2+\sqrt{2}, y=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ va rezulta $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}>0$ şi cum $x-y>0$

vom obține $f(x)>f(y)$ .... 2 puncte

2. Fie pătratul $ABCD$ de latura 4 , în care $AC\cap BD=\{O\}$ şi M este mijlocul segmentului $[BO]$.

Considerăm punctul N astfel încât $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{DO}$.

a) Demonstrați că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}=2\cdot\overrightarrow{AM}$.

b) Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}$, utilizând eventual formula medianei $m_a^2=\dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$.

c) Demonstrați că punctele A, M, N sunt puncte coliniare.

Soluție:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}=2\cdot\overrightarrow{AM}$ .... 2 puncte

b) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}|=|2\overrightarrow{AM}|=2\sqrt{10}$ .... 2 puncte

c) Obține $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CN}=2\cdot\overrightarrow{AM}$, deci A, M, N - coliniare .... 3 puncte

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu rația $a_1\neq 0$.

a) Demonstrați că $a_1+a_2+...+a_n=\dfrac{a_1\cdot n(n+1)}{2}, \forall n\geq 1$.

b) Verificați relația $\frac{a_1}{a_1+a_2+...+a_n}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right), \forall n\geq 1$.

c) Demonstrați că $S=\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_1}{a_1+a_2+a_3}+...+\frac{a_1}{a_1+a_2+...+a_n}=\frac{2n}{n+1}$, $\forall n\geq 1$.

Soluție:

a) Obține $a_1+a_2+...+a_n=\frac{(a_1+na_1)\cdot n}{2}=\frac{a_1\cdot n(n+1)}{2}$, $\forall n\geq 1$ .... 2 puncte

b) Obține $\frac{a_1}{a_1+a_2+...+a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ .... 2 puncte

c) Obține $S=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$ .... 3 puncte

4. a) Demonstrați că $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$, $\forall n\geq 1$

b) La un stadion cu capacitatea de 10000 de locuri vin spectatorii. În primul minut vine 1 spectator, în al doilea minut vin 3 spectatori, în al treilea minut vin 5 spectatori , etc. După câte minute stadionul se va umple ?

Soluție:

a) Observă că şirul $1,3,5,...,2n-1$ sunt primii n termeni ai unei progresii aritmetice, deci

$1+3+5+...+(2n-1)=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2, \forall n\geq 1$ .... 3 puncte

sau $1+3+5+...+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=n^2$ .... 3 puncte

b) Numărul spectatorilor veniți în primele **n** minute va fi

$1+3+5+...+(2n-1)=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$, deci $n^2=10000$, adică $n=100\text{ min}$ .... 4 puncte

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Rezolvați în mulțimea R ecuațiile :

a) $3^{\frac{1}{x}} - 3 = 2 \cdot 3^{\frac{1}{2x}}$,

b) $\log_3 x \cdot \log_{x+6} 9 = 1$.

Soluție:

a) Notăm $3^{\frac{1}{2x}} = a$ şi obținem $a^2 - 2a - 3 = 0$ .... 1 punct

Rezolvând se obține $a = -1$ sau $a = 3$.Convine numai $a = 3$, deci $x = \frac{1}{2}$ .... 2 puncte

b) Din condițiile de existență deducem că $x > 0$.

Folosind proprietățile logaritmilor se obține $\log_3 x^2 = \log_3 (x+6)$ .... 2 puncte

Rezolvând se obține că $x = 3$ sau $x = -2$ şi convine numai $x = 3$ .... 2 puncte

2. Fie $z \in \mathbb{C}$ un număr complex astfel încât $z^2 + 2z + 4 = 0$.

a) Demonstrați că z^3 este număr real.

b) Calculați $z^{2016} + 2 \cdot z^{2015} + 2^2 \cdot z^{2014} + 2^3 \cdot z^{2013} + ... + 2^{2015} \cdot z + 2^{2016}$.

Soluție:

a) Observăm că $z \neq 2$, deci $z^2 + 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2 + 2z + 4) = 0 \Leftrightarrow z^3 = 8$ .... 4 puncte

sau

Rezolvând ecuația $z^2 + 2z + 4 = 0$, obținem z_1, z_2 .... 2 puncte

Prin ridicare la cub deducem , în fiecare caz, că $z^3 = 8$ .... 2 puncte

b) Grupând termenii câte trei şi folosind $z^2 + 2z + 4 = 0$, se deduce că

$(z^{2016} + 2 \cdot z^{2015} + 2^2 \cdot z^{2014}) + (2^3 \cdot z^{2013} + 2^4 \cdot z^{2012} + 2^5 \cdot z^{2011}) +$

$+ \ldots + (2^{2013} \cdot z^3 + 2^{2014} \cdot z^2 + 2^{2015} \cdot z) + 2^{2016} = 2^{2016}$ .... 3 puncte

3. Trei elevi au intrat într-un magazin pentru a cumpăra câte ceva. Primul elev a cumpărat 4 sandviciuri, o cană de ceai şi 10 gogoşi, plătind în total 16,90 lei. Al doilea elev a cumpărat 3 sandviciuri, o cană de ceai şi 7 gogoşi, plătind 12,60 lei. Cât va plăti al treilea elev pentru un sandvici, o cană de ceai şi o gogoaşă ?

Soluție:

Fie s - prețul unui sandvici, c –prețul unei ceşti de ceai şi g -prețul unei gogoşi .... 1 punct

Din enunț avem : $\begin{cases} 4s+c+10g=16,9 \\ 3s+c+7g=12,6 \end{cases}$ .... 2 puncte

Înmulțind prima ecuație cu 2 şi pe a doua cu 3 obținem $\begin{cases} 8s+2c+20g=33,8 \\ 9s+3c+21g=37,8 \end{cases}$ .... 2 puncte

Scăzând ecuațiile obținem $s+c+g=4$ .... 1 punct

Aşadar suma plătită de cel de-al treilea elev este de 4 lei .... 1 punct

4. În toate pătrățelele 1×1 ale unei table de dimensiuni 3×4 sunt scrise numere astfel încât numerele din fiecare linie şi fiecare coloană formează câte o progresie aritmetică. Ştiind că suma celor patru numere din colțurile tablei este 672, să se determine suma numerelor de pe tablă.

Soluție:

Fie $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$, numerele scrise pe tablă .... 1 punct

Avem $\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4=2(a_1+a_4) \\ b_1+b_2+b_3+b_4=2(b_1+b_4) \\ c_1+c_2+c_3+c_4=2(c_1+c_4) \end{cases}$ .... 2 puncte

Suma tuturor numerelor de pe tablă este $S=2(a_1+b_1+c_1+a_4+b_4+c_4)$ .... 2 puncte

Pe de altă parte $S=2\left[\dfrac{(a_1+c_1)\cdot 3}{2}+\dfrac{(a_4+c_4)\cdot 3}{2}\right]=3(a_1+c_1+a_4+c_4)=2016$ .... 2 puncte

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\det\left(A\cdot A^T-x\cdot I_2\right)$, unde A^T - reprezintă transpusa matricei A.

a) Demonstraţi că $f(0)\geq 0$.

b) Găsiţi $a,b,c\in\mathbb{R}$ dacă $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(-n)+f(-n+1)+...+f(n-1)+f(n)-2n-1}{n^3}\right)$

Soluţie:

a) $f(0)=\det(A\cdot A^T)=\det(A)\cdot\det(A^T)=\left[\det(A)\right]^2\geq 0$, sau calcul direct .... 2 puncte

b) Obţine $f(x)=x^2-3x+1$, deci $a=c=1, b=-3$ .... 3 puncte

c) Obţine $f(-n)+...+f(n)-2n-1=2\left(1^2+2^2+...+n^2\right)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3}$ .... 1 punct

Finalizare : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(-n)+f(-n+1)+...+f(n-1)+f(n)-2n-1}{n^3}\right)=\dfrac{2}{3}$ .... 1 punct

2. O matrice de ordinul al doilea, având elementele din mulţimea $\{0,1,2\}$, se numeşte ***echilibrată*** dacă oricare două elemente aflate pe aceeaşi linie şi aceeaşi coloană sunt numere consecutive. De exemplu $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ este matrice ***echilibrată.***

a) Justificaţi că matricea I_2 este matrice ***echilibrată.***

b) Câte matrice ***echilibrate*** se pot construi ?

c) Justificaţi că transpusa oricărei matrice echilibrate este tot o matrice ***echilibrată***.

Soluţie:

a) $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi constatăm că este formată cu elemente din mulţimea specificată şi pe orice linie şi orice coloană sunt numere consecutive, deci este matrice ***echilibrată*** .... 2 puncte

b) Dacă $a_{11}=0$, atunci $a_{12}=a_{21}=1$ iar a_{22} poate fi ales în două moduri , deci există 2 matrice de acest tip. La fel dacă $a_{11}=2$ vor exista două matrice de acest tip .... 1 punct

Dacă $a_{11}=1$, atunci $a_{22}=1$ iar celelalte elemente pot fi alese în câte două moduri, deci există 4 matrice de acest tip , şi anume: $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ .... 1 punct

Finalizare : există opt matrice ***echilibrate*** .... 1 punct

c) Deoarece o matrice ***echilibrată*** are elementele de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană numere consecutive, rezultă că regula se aplică şi matricei transpuse .... 2 puncte

Sau prin verificarea directă a celor opt matrice anterior construite.

3. a) Fie $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{mx^2+nx+p}{x+q},\ m,n,p,q\in\mathbb{R},D\subset\mathbb{R}.$

Să se determine $m,n,p,q\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcţiei *f* să admită asimptotele $x=2$ şi $y=3x-1$, iar $A(1,3)$ să fie punct al graficului.

b) Considerăm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $\left|f(x)-\sin^3 2x\right|\le x^4$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

Calculaţi $\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

Soluţie:

a) $x=2$ este asimptotă verticală dacă şi numai dacă $2+q=0$ şi $4m+2n+p\neq 0$, deci $q=-2$ (1) .... 1 punct

$A(1,3)$ aparţine graficului lui *f*, rezultă (ţinând cont de relaţia (1)) că avem $m+n+p=-3$ (2) .... 1 punct

Celelalte condiţii:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3\Leftrightarrow m=3$ .... 1 punct

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-3x\right)=-1\Leftrightarrow n=-7\overset{(2)}{\Rightarrow} p=1$ .... 1 punct

b) Putem scrie $-x^4+\sin^3 2x\le f(x)\le x^4+\sin^3 2x,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$ .... 1 punct

Se obţine $-x+\dfrac{\sin^3 2x}{8x^3}\cdot 8\le\dfrac{f(x)}{x^3}\le x+\dfrac{\sin^3 2x}{8x^3}\cdot 8,\ (\forall)x\in\mathbb{R}^*$ .... 1 punct

Trecem la limită , se obţine $\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=8$ .... 1 punct

4. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$.

a) Demonstraţi că $A^4=B^3$.

b) Determinaţi matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât să avem $AX+XB=I_2$.

c) Verificaţi egalitatea $AB+C+I_2=O_2$, unde $C=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ şi apoi demonstraţi că $(AB)^n\neq I_2,\ (\forall)n\ge 1$

Soluţie:

a) Obţine $A^2=-I_2, A^4=I_2$ .... 1 punct

Obţine $B^2=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix}, B^3=I_2$ .... 1 punct

b) Dacă $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, atunci $AX=\begin{pmatrix}c&d\\-a&-b\end{pmatrix}$ şi $XB=\begin{pmatrix}-b&a-b\\-d&c-d\end{pmatrix}$

Relația $AX + XB = I_2$ conduce la $\begin{cases} c-b=1 \\ a+d-b=0 \\ a+d=0 \\ -b+c-d=1 \end{cases}$, de unde $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .... 2 puncte

c) Se verifică prin calcul că $AB + C + I_2 = O_2$ .... 1 punct

Prin calcul direct, sau folosind formula binomului lui Newton, se obține că:

$\left(AB\right)^n = \left(-1\right)^n \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2, \left(\forall\right) n \geq 1$ .... 2 puncte

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Fie (G,·) un grup multiplicativ cu elementul neutru e. Demonstraţi că :

a) $(a^{-1}ba)^3 = a^{-1}b^3a$, oricare ar fi $a,b \in G$.

b) Dacă $a,b \in G$ astfel încât $a^{-2}ba^2 = e$ şi $a\ ba^{-2} = b^3$, atunci $a = b = e$.

Soluţie:

a) Avem $(a^{-1}ba)^3 = (a^{-1}ba)(a^{-1}ba)(a^{-1}ba) = a^{-1}\cdot b\cdot\left(a\cdot a^{-1}\right)\cdot b\cdot\left(a\cdot a^{-1}\right)\cdot b\cdot a = a^{-1}\cdot b^3\cdot a$
.... 2 puncte

b) Ridicăm prima egalitate la puterea a treia şi raţionăm ca la a) şi obţinem $a^{-2}b^3a^2 = e$ ...... 2 puncte

Înlocuim b^3 ţinând cont de a doua egalitate, avem:

$a^{-2}(aba^{-2})a^2 = e \Leftrightarrow (a^{-2}a)b(a^{-2}a^2) = e \Leftrightarrow a^{-1}be = e.$ Deci $a^{-1}b = e$ rezultă $a = b$ (1) ...... 2 puncte

Finalizare: Înlocuim în prima egalitate, obţinem $a^{-2}aa^2 = e$, deci $a = e$ şi din (1) obţinem $a = b = e.$
.... 1 punct

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x) = e^x(\cos^2 x + 2016) + 1.$ Se cere:

a) Arătaţi că $f(x) - f'(x) = e^x \sin 2x + 1,\quad x \in \mathbb{R}.$

b) Calculaţi $I = \int \frac{\sin 2x + e^{-x}}{e^{-x} + \cos^2 x + 2016}dx.$

Soluţie:

a) Calculează $f'(x) = e^x\cos^2 x - e^x \sin 2x + 2016e^x$ .... 1 punct

Finalizare: $f(x) - f'(x) = e^x \sin 2x + 1,\quad x\in\mathbb{R}.$ .... 1 punct

b) Obţine $I = \int \frac{e^x \sin 2x + 1}{1 + e^x(\cos^2 x + 2016)}dx$ .... 2 puncte

$= \int \frac{f(x) - f'(x)}{f(x)}dx = \int dx - \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ .... 2 puncte

Finalizare: $= x - \ln\left|f(x)\right| + C = x - \ln[e^x(\cos^2 x + 2016) + 1] + C$ .... 1 punct

3. Fie matricele $X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$ şi

mulţimea $G = \left\{ M(r) \mid M(r) = I_2 + rX, r \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \right\}$

a) Calculaţi X^2, X^3.

b) Arătați că $M(r)\cdot M(s)\in G$, pentru orice $M(r),M(s)\in G$.

c) Arătați că $(G,\cdot)$ este grup comutativ.

d) Rezolvați ecuația $(M(r))^3 = I_2 + 13X$, unde $M(r)\in G$.

Soluție:

a) $X^2 = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}$; $X^3 = \begin{pmatrix} 20 & -12 \\ 20 & -12 \end{pmatrix}$ .... 1 punct

b) Avem $X^2 = 2X$

$M(r)\cdot M(s) = (I_2 + rX)\cdot(I_2 + sX) = I_2^2 + rXI_2 + sXI_2 + rsX^2 = I_2 + rX + sX + rsX^2 =$

$= I_2 + rX + sX + 2srX = I_2 + (r+s+2rs)X = I_2 + tX,\ \ t = r+s+2rs\in\mathbb{R}$

Deoarece $r \neq -\frac{1}{2},\ s\neq -\frac{1}{2} \Rightarrow (2r+1)\cdot(2s+1)\neq 0$, deci $r+s+2rs \neq -\frac{1}{2}$ .... 2 puncte

c) Asociativitatea, comutativitatea .... 1 punct

$I_2 = M(0)\in G$, element neutru. Inversa matricei $M(r)$ din G este $M(r^*) = M(-\frac{r}{1+2r})\in G$

Deci $(G,\cdot)$ este grup comutativ .... 1 punct

d) ($(M(r))^3 = I_2 + (3r + 6r^2 + 4r^3)X$), $(M(r))^3 = I_2 + 13X$. Deci avem $3r + 6r^2 + 4r^3 = 13$

.... 1 punct

$(r-1)(4r^2 + 10r + 13) = 0 \Rightarrow r = 1\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. Am obținut că $M(1) = I_2 + X$ este soluția ecuației date .... 1 punct

4. Se consideră integrala nedefinită $I(x,n) = \int \frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)+n}dx$,

unde $x\in(0,+\infty)$ și $n\in\mathbb{N}$.

a) Calculați $I(x,0)$.

b) Calculați $I(x,1)$.

c) Calculați $I(x,n)$, pentru $n\geq 2$.

Soluție:

a) $I(x,0) = \int \frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}dx$

Obține $\frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right)$ .... 2 puncte

Obține $\int \frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}dx = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x\cdot(x+3)}{(x+1)\cdot(x+2)}\right) + C$ .... 1 punct

b) $I(x,1) = \int \frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)+1}dx = \int \frac{2x+3}{(x^2+3x+1)^2}dx = -\frac{1}{x^2+3x+1} + C$ .... 2 puncte

c) $I(x,n) = \int \frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)+n}dx = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\cdot arctg\left(\frac{x^2+3x+1}{\sqrt{n-1}}\right) + C$ .... 2 puncte

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

Profil Filologie / Științe sociale

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A IX-A

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+1,\ a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0.$

a) Să se determine numerele a şi b ştiind că funcția admite valoarea minimă $-\frac{5}{4}$, iar graficul funcției este simetric față de dreapta de ecuație $x=\frac{3}{4}$.

b) Aflați aria triunghiului determinat de intersecțiile graficului cu axele de coordonate.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

a) Calculați suma $S_n=f(1)+f(2)+...+f(n),\ n\in\mathbb{N}^*$.

b) Determinați valorile numărului natural n pentru care $[S_n]=3$, unde cu $[S_n]$ s-a notat partea întreagă a numărului S_n.

3. Fie $ABCD$ un paralelogram şi punctele M, N, P, Q pe laturile $[AB],[BC],[CD]$ şi respectiv $[DA]$ astfel încât $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{BN}=a\overrightarrow{NC},\ \overrightarrow{CP}=a\overrightarrow{PD},\ \overrightarrow{DQ}=a\overrightarrow{QA},\ a>0$.

a) Demonstrați că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

b) Arătați că dreptele AC, BD, MP, NQ sunt concurente.

4. Coborând în interiorul pământului, la fiecare 30,5m temperatura creşte cu $1^\circ C$. Dacă la suprafața Pământului temperatura este de $10^\circ C$, atunci:

a) Ce temperatură va fi la adâncimea de 1098m ?

b) La ce adâncime temperatura atinge punctul de fierbere al apei ?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

Profil Filologie / Științe sociale

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

1. Determinați soluțiile reale ale ecuațiilor în necunoscuta x:

a) $x^{\log_x \sqrt{x^2-4}} = \sqrt{5}$;

b) $\dfrac{1}{3-\log_2 x} + \dfrac{1}{2+\log_2 x} = 1$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

a) Să se arate că $\ln\left(\dfrac{2+3}{2}\right) \geq \dfrac{\ln 2 + \ln 3}{2}$.

b) Să se arate că $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \dfrac{\ln a + \ln b}{2}, \quad \forall a,b \in (0,+\infty)$.

3. a) Să se arate că: $\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2 = x + 2\sqrt{x-1}, \forall x \geq 1$ şi $\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2 = x - 2\sqrt{x-1}, \forall x \geq 1$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 4$.

4. Fie A, B, C trei oraşe, astfel încât $d(A,B) = d(B,C)$ (s-a notat $d(x,y)$ distanța între oraşul x şi oraşul y). Două maşini plecă din oraşul A spre oraşul C, trecând prin oraşul B. Prima maşină parcurge distanța de la A la B cu viteza v km/h, apoi de la B la C merge de două ori mai repede. A doua maşină merge de A la B cu viteza medie de 48 km/h, apoi parcurge distanța de la B la C cu viteza $(v+20)$ km/h. Cele două maşini parcurg distanța de la A la C în acelaşi timp. Calculați viteza v.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016

Profil Filologie / Ştiinţe sociale

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XI-A

1. După două scumpiri succesive cu acelaşi procent, preţul unui produs este acelaşi cu cel obţinut în urma unei singure scumpiri cu 44%. Care este procentul scumpirilor succesive?

2. Seria statistică prezentată în tabelul de mai jos redă frecvenţa relativă a mijloacelor de transport în comun, luând ca valori clasele ce reprezintă intervalele orare dintr-o zi lucrătoare.

Interval orar	[0;4)	[4;8)	[8;12)	[12;16)	[16;20)	[20;24)
Frecvenţa relativă	0,05	0,15	0,25	0,2	0,25	0,1

a) Calculaţi media seriei statistice şi clasa mediană.
b) Într-o zi de week-end frecvenţa relativă a celei de a treia clase scade, iar frecvenţa penultimei clase creşte cu atât cât a scăzut frecvenţa celei de a treia. Ştiind că media seriei statistice creşte cu 0,4, determinaţi frecvenţele relative ale celor două clase .

3. Se consideră graful neorientat $G=(V,M)$ cu 5 vârfuri şi
$M=\{[1,2],[1,3],[1,4],[2,3],[2,4],[2,5],[3,4],[3,5],[4,5]\}$.
a) Arătaţi că graful G este conex.
b) Câte muchii mai trebuie adăugate pentru a obţine un graf complet?
c) Câte muchii trebuie eliminate pentru a obţine un graf arbore?

4. Fiecare elev dintr-o clasă trimite câte o felicitare fiecărui prieten din aceeaşi clasă. Demonstraţi că cel puţin doi elevi trimit acelaşi număr de felicitări.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

Profil Filologie / Ştiințe sociale

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XII-A

.

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculați A^2 și A^3.

b) Arătați că $A^{2016}=2016A-2015I_2$.

c) Rezolvați ecuația $X^2=A$, unde X este o matrice pătratica de ordinul 2, cu elemente numere reale.

2. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}1+2x & 0 & 4x\\ 0 & 1 & 0\\ -x & 0 & 1-2x\end{pmatrix}$, x număr real.

a) Calculați det($A(x)$).

b) Arătați că are loc egalitatea $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi x şi y numere reale.

c) Calculați $P=A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$, unde n este număr natural nenul.

3. În reperul cartezian (xOy) se consideră punctele $A_n(n-1,\ 2n+1)$, n număr natural.

a) Scrieți ecuația dreptei A_0A_1.

b) Arătați că punctele A_0, A_1, A_n sunt coliniare oricare ar fi numărul natural n, $n\geq 2$.

c) Determinați numărul natural n, $n\geq 2$, astfel încât aria triunghiului OA_1A_n să fie 3.

4. În fiecare nod rezultat din intersecțiile celor 7 linii şi 7 coloane ale unui tablou pătratic se află câte o albină. La un moment dat toate albinele zboară şi fiecare se aşează pe un nod vecin, de pe aceeaşi linie sau coloană cu cel de pe care a zburat. Să se arate că există un nod pe care nu s-a aşezat nicio albină.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / ştiinţe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+1,\ a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0.$

a) Să se determine numerele a şi b ştiind că funcţia admite valoarea minimă $-\frac{5}{4}$, iar graficul funcţiei este simetric faţă de dreapta de ecuaţie $x=\frac{3}{4}$.

b) Aflaţi aria triunghiului determinat de intersecţiile graficului cu axele de coordonate.

Soluţie.

a) $-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{5}{4},\ -\frac{b}{2a}=\frac{3}{4}$ .... 2 puncte

$9a^2-36a=0$ .... 1 punct

$a=4, b=-6$ .... 1 punct

b) $G_f\cap(Ox):A(\frac{3-\sqrt{5}}{4},0), B(\frac{3+\sqrt{5}}{4},0);\ G_f\cap(Oy):C(0,1)$ .... 2 puncte

$A_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot OC}{2}=\frac{\sqrt{5}}{4}$ .... 1 punct

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

a) Calculaţi suma $S_n=f(1)+f(2)+...+f(n),\ n\in\mathbb{N}^*$.

b) Determinaţi valorile numărului natural n pentru care $[S_n]=3$, unde cu $[S_n]$ s-a notat partea întreagă a numărului S_n.

Soluţie.

a) $S_n=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ .... 1 punct

$S_n=\sqrt{n+1}-1$ .... 2 puncte

b) $\left[\sqrt{n+1}-1\right]=3\Leftrightarrow 3\le\sqrt{n+1}-1<4$ .... 2 puncte

$15\le n<24$ .... 1 punct

$n\in\{15,16,17,18,19,20,21,22,23\}$ .... 1 punct

3. Fie $ABCD$ un paralelogram şi punctele M, N, P, Q pe laturile $[AB],[BC],[CD]$ şi respectiv $[DA]$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BN} = a\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{CP} = a\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{DQ} = a\overrightarrow{QA}, a > 0$.

a) Demonstrați că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

b) Arătați că dreptele AC, BD, MP, NQ sunt concurente.

Soluție.

a) $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{CP} = a\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$ .... 1 punct

$\overrightarrow{BN} = a\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{DQ} = a\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{QA} = \overrightarrow{CN}$ .... 1 punct

$\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{PN} \Rightarrow MNPQ$ este paralelogram.. 2 puncte

b) $MBPD$ este paralelogram.. 1 punct

$BNDQ$ este paralelogram.. 1 punct

$[AC],[BD],[MP],[NQ]$ au acelaşi mijloc.. 1 punct

4. Coborând în interiorul pământului, la fiecare 30,5m temperatura creşte cu $1^\circ\mathrm{C}$. Dacă la suprafața Pământului temperatura este de $10^\circ\mathrm{C}$, atunci:

a) Ce temperatură va fi la adâncimea de 1098m ?

b) La ce adâncime temperatura atinge punctul de fierbere al apei ?

Soluție.

a) $T(n) =$ temperatura la n metri. $T(n) = 10 + \dfrac{n}{30,5}$ .... 2 puncte

$T(1098) = 10 + \dfrac{1098}{30,5}$ .... 1 punct

$T(1098) = 46^\circ C$ .... 1 punct

b) $10 + \dfrac{n}{30,5} = 100$ .... 2 puncte

$n = 2745m$ .... 1 punct

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / ştiințe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Determinați soluțiile reale ale ecuațiilor în necunoscuta x :

a) $x^{\log_x \sqrt{x^2-4}} = \sqrt{5}$; b) $\dfrac{1}{3-\log_2 x} + \dfrac{1}{2+\log_2 x} = 1$.

Soluție.

a) $\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x>0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in [2,+\infty)$ .... 1 punct

$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{5}$ .... 1 punct

$x=3$ soluția ecuației .... 1 punct

b) $\begin{cases} x>0 \\ 3-\log_2 x \neq 0 \Rightarrow x \in (0,+\infty) \setminus \left\{\dfrac{1}{4}, 8\right\} \\ 2+\log_2 x \neq 0 \end{cases}$ .... 1 punct

$\log_2 x = t$, $\dfrac{1}{3-t} + \dfrac{1}{2+t} = 1 \Rightarrow t^2 - t - 1 = 0$ .... 1 punct

$t_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \log_2 x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = 2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}, x_1 \in (0,+\infty) \setminus \left\{\dfrac{1}{4}, 8\right\}$ .... 1 punct

$t_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \log_2 x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_2 = 2^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, x_2 \in (0,+\infty) \setminus \left\{\dfrac{1}{4}, 8\right\}$ .... 1 punct

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x$.

a) Să se arate că $\ln\left(\dfrac{2+3}{2}\right) \geq \dfrac{\ln 2 + \ln 3}{2}$.

b) Să se arate că $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \dfrac{\ln a + \ln b}{2}, \quad \forall a,b \in (0,+\infty)$.

Soluție.

a) $\ln\left(\dfrac{2+3}{2}\right) \geq \dfrac{\ln 2 + \ln 3}{2} \Leftrightarrow \ln\dfrac{5}{2} \geq \dfrac{\ln 6}{2} \Leftrightarrow \ln\dfrac{25}{4} \geq \ln 6$ .... 2 puncte

$\Leftrightarrow \dfrac{25}{4} \geq 6$ .... 1 punct

b) $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \dfrac{\ln(a \cdot b)}{2}$ .... 1 punct

$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$ .... 1 punct

$a^2-2ab+b^2\geq 0$ .... 1 punct

$(a-b)^2\geq 0$, $\forall a,b\in(0,+\infty)$ .... 1 punct

3. a) Să se arate că: $\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2=x+2\sqrt{x-1}, \forall x\geq 1$ şi $\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2=x-2\sqrt{x-1}, \forall x\geq 1$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=4$.

Soluție.

$\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2=x-1+2\sqrt{x-1}+1=x+2\sqrt{x-1}$ .... 1 punct

$\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2=x-1-2\sqrt{x-1}+1=x-2\sqrt{x-1}$ .... 1 punct

b) $(x-1)+1\geq 2\sqrt{x-1}, \forall x\geq 1$ .... 1 punct

$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=4$ .... 1 punct

$\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=4$ .... 1 punct

Pentru $x\geq 2$, $\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=4\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=2\Rightarrow x=5$ .... 1 punct

Pentru $x\in[1,2)$: $\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=4\Leftrightarrow 2=4$, fals .... 1 punct

4. Fie A,B,C trei oraşe, astfel încât $d(A,B)=d(B,C)$ (s-a notat $d(x,y)$ distanța între oraşul x şi oraşul y). Două maşini plecă din oraşul A spre oraşul C, trecând prin oraşul B. Prima maşină parcurge distanța de la A la B cu viteza v km/h, apoi de la B la C merge de două ori mai repede. A doua maşină merge de A la B cu viteza medie de 48 km/h, apoi parcurge distanța de la B la C cu viteza $(v+20)$ km/h. Cele două maşini parcurg distanța de la A la C în acelaşi timp. Calculați viteza v.

Soluție.

Notăm $d(A,B)=d(B,C)=d$.

Prima maşină parcurge distanța de la A la B cu viteza v în timpul t, iar de la B la C cu viteza $2v$ în timpul $\frac{t}{2}$ .... 1 punct

A doua maşină parcurge distanța de la A la B cu viteza 48 km/h în timpul t_1, iar de la B la C cu viteza $(v+20)$ km/h în timpul t_2 .... 1 punct

$\begin{cases} t=\frac{d}{v} \\ \frac{t}{2}=\frac{d}{2v} \end{cases}$ .... 1 punct

$t_1+t_2=\frac{d}{48}+\frac{d}{v+20}$ .... 1 punct

$t_1+t_2=\frac{3t}{2}=\frac{3d}{2v}$ .... 1 punct

$\frac{d}{48}+\frac{d}{v+20}=\frac{3d}{2v}$ .... 1 punct

$v^2-4v-1440=0\Rightarrow v=40$ km/h .... 1 punct

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / ştiințe sociale

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. După două scumpiri succesive cu acelaşi procent, prețul unui produs este acelaşi cu cel obținut în urma unei singure scumpiri cu 44%. Care este procentul scumpirilor succesive?

Soluție.

Dacă a este prețul inițial, după prima scumpire cu $p\%$ prețul va fi $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ .... 2 puncte

După a doua scumpire prețul va fi $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ .... 2 puncte

Prețul final este $\frac{144}{100}a$ .... 1 punct

$\left(1+\frac{p}{100}\right)^2=\frac{144}{100}$ .... 1 punct

$p=20$ .... 1 punct

2. Seria statistică prezentată în tabelul de mai jos redă frecvența relativă a mijloacelor de transport în comun, luând ca valori clasele ce reprezintă intervalele orare dintr-o zi lucrătoare.

Interval orar	[0;4)	[4;8)	[8;12)	[12;16)	[16;20)	[20;24)
Frecvența relativă	0,05	0,15	0,25	0,2	0,25	0,1

a) Calculați media seriei statistice şi clasa mediană.
b) Într-o zi de week-end frecvența relativă a celei de a treia clase scade, iar frecvența penultimei clase crește cu atât cât a scăzut frecvența celei de a treia. Știind că media seriei statistice crește cu 0,4, determinați frecvențele relative ale celor două clase .

Soluție.

a) Media este $m=2\cdot 0,05+6\cdot 0,15+10\cdot 0,25+14\cdot 0,2+18\cdot 0,25+22\cdot 0,1=13$,
unde 2, 6, 10, 14, 18, 22, sunt valorile centrale ale claselor .... 2 puncte
Șirul frecvențelor relative cumulate crescător este: 0,05; 0,2; 0,45; 0,65; 0,9, 1 .... 1 punct
Clasa mediană este intervalul [12;16). .... 1 punct
b) Dacă frecvența clasei a treia va fi $0,25-x$ iar a penultimei clase $0,25+x$, media pentru o zi de week-end este $2\cdot 0,05+6\cdot 0,15+10\cdot(0,25-x)+14\cdot 0,2+18\cdot(0,25+x)+22\cdot 0,1=13,4$. .... 1 punct
$x=0,05$ .... 1 punct
Frecvențele relative ale celor două clase devin 0,2 și 0,3.. 1 punct

3. Se consideră graful neorientat $G=(V,M)$ cu 5 vârfuri și
$M=\{[1,2],[1,3],[1,4],[2,3],[2,4],[2,5],[3,4],[3,5],[4,5]\}$.

a) Arătați că graful G este conex.
b) Câte muchii mai trebuie adăugate pentru a obține un graf complet?
c) Câte muchii trebuie eliminate pentru a obține un graf arbore?

Soluție.
a) Graful este conex pentru că între oricare două vârfuri există cel putin un drum .... 2 puncte
b) $C_5^2=10$, 10 – 9 = 1, Trebuie adăugată muchia ($[1,5]$) .... 2 puncte
c) Graful arbore este conex și fără cicluri .... 2 puncte
Trebuie să eliminăm 5 muchii .... 1 punct

4. Fiecare elev dintr-o clasă trimite câte o felicitare fiecărui prieten din aceeași clasă. Demonstrați că cel puțin doi elevi trimit același număr de felicitări.

Soluție.
Asociem celor n elevi din clasă un gaf cu n vârfuri, unde gradul fiecărui vârf este numărul de felicitări trimise .... 1 punct
Presupunem prin reducere la absurd că gradele vârfurilor sunt $\{0,1,2,...,n-1\}$ .... 2 puncte
Înseamnă că există un vârf cu gradul $n-1$, care va fi legat de toate celelalte $n-1$ vârfuri .. 2 puncte
Contradicție cu faptul că există un nod cu gradul 0 .... 2 puncte

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / științe sociale

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculați A^2 și A^3.

b) Arătați că $A^{2016}=2016A-2015I_2$.

c) Rezolvați ecuația $X^2=A$, unde X este o matrice pătratica de ordinul 2, cu elemente numere reale.

Soluție.

a) $A^2=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ .... 1 punct

b) $A^n=\begin{pmatrix}1 & -2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \forall n\in\mathbb{N}^*$ .... 1 punct

$A^n+(n-1)I_2=nA, \forall n\in\mathbb{N}^*$ .... 1 punct

$A^{2016}+2015I_2=2016A$ .... 1 punct

c) $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, X^2=A\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+bc=1\\ b(a+d)=-2\\ c(a+d)=0\\ d^2+bc=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=1\\ b(a+d)=-2\\ c=0\\ d^2=1\end{cases}$ .... 2 puncte

$X\in\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$ .... 1 punct

2. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}1+2x & 0 & 4x\\ 0 & 1 & 0\\ -x & 0 & 1-2x\end{pmatrix}$, x număr real.

a) Calculați $\det(A(x))$.

b) Arătați că are loc egalitatea $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi x și y numere reale.

c) Calculați $P=A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$, unde n este număr natural nenul.

Soluție.

a) $\det(A(x)) = 1 - 4x^2 + 4x^2 = 1$, pentru orice x numă real. .... 2 puncte

b) Verifică relația .... 3 puncte

c) $P = A\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}\right) = A\left(\frac{n}{n+1}\right)$, pentru orice n număr natural nenul .... 2 puncte

3. În reperul cartezian (xOy) se consideră punctele $A_n(n-1, 2n+1)$, n număr natural.

a) Scrieți ecuația dreptei A_0A_1.

b)Arătați că punctele A_0, A_1, A_n sunt coliniare oricare ar fi numărul natural n, $n \geq 2$.

c) Determinați numărul natural n, $n \geq 2$, astfel încât aria triunghiului OA_1A_n să fie 3.

Soluție.

a) $A_0(-1,1)$, $A_1(0,3)$ .... 1 punct

Ecuația dreptei (A_0A_1) este: $2x - y + 3 = 0$ .... 2 puncte

b) $A_n \in A_0A_1$ deoarece $2(n-1) - (2n+1) + 3 = 0$. .... 2 puncte

c) $\frac{1}{2} \cdot |-3(n-1)| = 3$ .... 1 punct

$n = 3$ .... 1 punct

4. În fiecare nod rezultat din intersecțiile celor 7 linii şi 7 coloane ale unui tablou pătratic se află câte o albină. La un moment dat toate albinele zboară şi fiecare se aşează pe un nod vecin, de pe aceeaşi linie sau coloană cu cel de pe care a zburat.

Să se arate că există un nod pe care nu s-a așezat nicio albină.

Soluție.

Să considerăm nodurile tabloului colorate ca o tablă de şah, în alb şi negru.

Atunci 24 de noduri sunt albe şi 25 de noduri sunt negre (sau invers) .... 3 puncte

Observăm că o albină care pleacă de pe un nod negru ajunge pe unul alb, iar de pe un nod alb ajunge pe unul negru. Cum de pe nodurile albe au plecat 24 de albine, ele nu pot ocupa 25 de noduri negre(sau invers). .... 4 puncte